Aufgabe 1: (4 Punkte)

Für die durch $f(x,y) = e^{xy}$ definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Man berechne und klassifiziere alle stationären Punkte der durch

$$f(x,y) = 2x^3 + 6x^2 + y^2 + 4y$$

definierten Funktion.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(2xy^3 + e^z - 2\pi\sin(\pi x), 8y^3 + 3x^2y^2 - 2z, xe^z - 4 - 2y\big)^T .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

c) Für die Kurve $\boldsymbol{c} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$ berechne man das folgende Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} .$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Gegeben seien die Fläche

$$F = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 4 \,,\; z = x^2\right\}$$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (-y, x + z, 6xy)^T .$$

a) Man parametrisiere F unter Verwendung von Polarkoordinaten.

b) Man berechne den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch F.