Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Differenzierbarkeit von Abbildungen:

Gegeben sei die Abbildung

$$\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

D offen, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots, x_n)^T$ und $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, , \cdots, f_m)^T$.

Definition:

Eine Abbildung $\boldsymbol{f}$ heißt in $\boldsymbol{x}_0 \in D$ **(vollständig,total) differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung $\boldsymbol{\ell} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit einer darstellenden Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gibt (d.h. $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$), für die gilt

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{||\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0||} = \boldsymbol{0}\,.$$

$\boldsymbol{\ell}$ heißt dann das **(vollständige,totale) Differential** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0$ und wird mit $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0)$ bezeichnet.

Definition:

Existieren alle partiellen Ableitungen der Komponenten von $\boldsymbol{f}$ und sind stetig, so heißt $\boldsymbol{f}$ **stetig partiell differenzierbar** oder auch C^1**-Funktion** in D.

Satz:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

a) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$, so ist die $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0)$ darstellende Matrix $\boldsymbol{A}$ die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** oder **Ableitung** von $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

b) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$, so ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0$ stetig.

c) Ist $\boldsymbol{f}$ auf D stetig partiell differenzierbar, so ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar auf D.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J}f(x,y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

Lösung:

a) MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('2*x*y/sqrt(x^2+y^2)',[-1,1,-1,1])
```

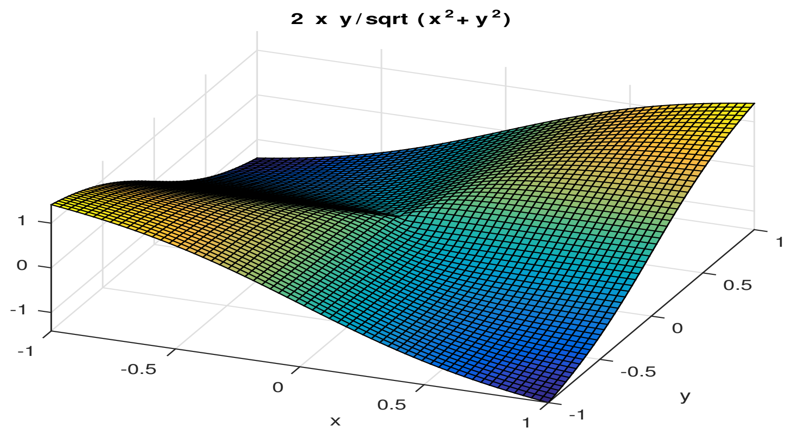

Bild 9: $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f für $(x,y) \neq (0,0)$ stetig.
Mit $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|2xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Damit ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig.

c) Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ lautet für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\boldsymbol{J}f = \left(\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)\,.$$

Für $(x,y) = (0,0)$ erhält man

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Analog berechnet man $f_y(0,0) = 0$.
Also gilt $\boldsymbol{J}f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$.

d) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f eine C^1-Funktion und damit total differenzierbar.
Für $(x_0,y_0) = (0,0)$ und mit $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2}$ erhält man

$$\frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \boldsymbol{J}f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|2xy|}{x^2+y^2}\,.$$

Für die Nullfolgen $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ und $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ berechnet man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2x_n y_n|}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|2\tilde{x}_n\tilde{y}_n|}{\tilde{x}_n^2+\tilde{y}_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n^2} = 0\,.$$

Also existiert der folgende Grenzwert nicht

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \boldsymbol{J}f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|}\,.$$

Damit ist f in $(x,y) = (0,0)$ nicht total differenzierbar .

Differentiationsregeln von Abbildungen:

Linearität:

Gegeben seien zwei Funktionen $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei D offen ist und $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Sind $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{x}_0$ differenzierbar, dann ist auch die Linearkombination $\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{x}_0$ differenzierbar.

Für die Jacobi-Matrix der Linearkombination gilt

$$\boldsymbol{J}(\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0) = \alpha\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \beta\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Hintereinanderausführung von Funktionen:

Gegeben sei eine Funktion $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $\boldsymbol{g} : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

Für $\boldsymbol{f}(D) \subset E$ wird die **Hintereinanderausführung** von $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ erklärt durch

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m\,, \quad \boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \\ \mathbb{R}^k \end{array} \arrow[dr, "\boldsymbol{g}"] & \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_0 \\ \mathbb{R}^n \end{array} \arrow[ur, "\boldsymbol{f}"] \arrow[rr, "\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}"] & & \begin{array}{c} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \\ \mathbb{R}^m \end{array}
\end{tikzcd}$$

Satz: (Kettenregel)

Ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0 \in D$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{y}_0 := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ (total) differenzierbar, so ist $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0$ (total) differenzierbar und es gilt

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Aufgabe 10:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$f_2 \circ \boldsymbol{f}_1 =: \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{f_2}{\to} \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} \mapsto r\cos(s^2)\,.$$

b)
$$\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1 =: \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Kettenregel:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}f_2(r,s) = \left(\cos(s^2)\,, \quad -2rs\sin(s^2) \right)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) &= \boldsymbol{J}(f_2 \circ \boldsymbol{f}_1)(x,y) = \boldsymbol{J}f_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) \\ &= \left(\cos((x^3)^2)\,, \quad -2ye^x x^3 \sin((x^3)^2) \right) \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(ye^x\cos(x^6) - 6x^5 ye^x \sin(x^6)\,, \quad e^x\cos(x^6) \right) \end{aligned}$$

direkt:

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) = \boldsymbol{f}_2(r(x,y)), s(x,y)) = \boldsymbol{f}(x,y) = ye^x\cos(x^6)$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \left(ye^x\cos(x^6) - 6x^5 ye^x \sin(x^6)\,, \quad e^x\cos(x^6) \right)$$

b) Kettenregel:

$$\boldsymbol{Jg}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Jg}_2(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2u+v} & e^{2u+v} \\ 3u^2v & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Jg}(x,y,z) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1)(x,y,z) = \boldsymbol{Jg}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) \cdot \boldsymbol{Jg}_1(x,y,z)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2\sin(2yz)+x^2} & e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 3(\sin(2yz))^2x^2 & (\sin(2yz))^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

direkt:

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) = \boldsymbol{g}_2(u(x,y,z),v(x,y,z)) = \boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3\sin(2yz) \\ e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ \sin^3(2yz)\cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Jg} = \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

Lineare Approximation und Tangentialebene:

Für differenzierbares $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ heißt die lineare Funktion

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

lineare Approximation oder auch **Tangentialabbildung** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0 \in D$, denn

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{||\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0||} = \boldsymbol{0}\,.$$

Speziell für $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ erhält man die **Tangentialebene** T_1 im Punkt $(x_0, y_0) \in D$

$$z = T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

oder in Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Jacobi-Matrix und vollständiges Differential:

Für die Abbildung $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots , x_n)^T$ und $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, , \cdots , f_m)^T$ sei die **Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$ folgendermaßen dargestellt:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \quad \cdots \quad , \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \right).$$

Das **vollständige Differential** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \cdots , x_n^0)^T$ ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die die Differentiale dx_1 , $\cdots$, dx_n der Koordinaten folgendermaßen abbildet

$$\begin{aligned} (dx_1\,,\ \cdots\,,\ dx_n)^T \quad \mapsto \quad \boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0)(dx_1\,,\ \cdots\,,\ dx_n) \quad &:= \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \cdot dx_n \\ &= \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,, \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen: $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = (x_1 - x_1^0\,,\ \cdots\,, x_n - x_n^0)^T = (dx_1\,,\ \cdots\,,\ dx_n)^T$.

$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ gibt näherungsweise die Funktionswertänderung von $\boldsymbol{f}$ beim Wechsel von $\boldsymbol{x}_0$ zu $\boldsymbol{x}$ an:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \approx \boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,.$$

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(i) Man bestimme die Tangentialebene $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

(ii) Man zeichne f und die Tangentialebene T_1 im Quadrat $[-3, 1] \times [-3, 1]$.

(iii) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(1, 1)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man bestimme $\boldsymbol{f}(0, 0)$ und berechne damit näherungsweise $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in $(0, 0)$.

Anschließend berechne man den euklidischen Abstand zwischen $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ und der Näherung.

Lösung:

a) (i) $f(x, y) = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, 2y),\; (x_0, y_0) = (-1, -1)$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$= 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$$

(ii) MATLAB-Befehle für die Flächenplots:

```
>>ezgraph3('surf','x','y','x^2+y^2',[-3,1,-3,1])
>>hold
>>ezgraph3('surf','x','y','2-2*(x+1+y+1)',[-3,1,-3,1])
```

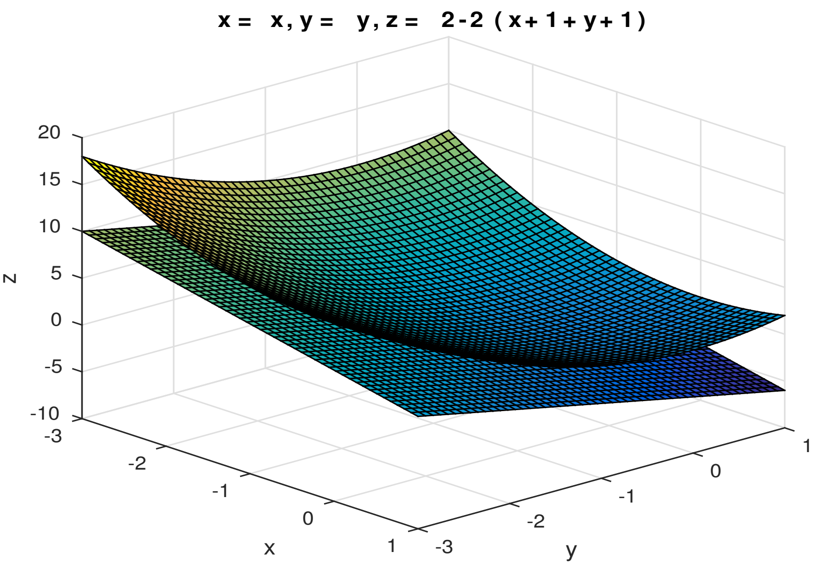

Bild 11: $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $T_1(x, y) = 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$

(iii) $|f(1, 1) - T_1(1, 1)| = |2 - (2 - 2(1 + 1) - 2(1 + 1)| = 8$

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x+y+1, x^2-y-1)^T$, $(x_0,y_0) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(0,0) = (1,-1)^T$

Für die Auswertung des vollständigen Differentials

$$\boldsymbol{df}(x_0,y_0)(dx,dy) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(x_0,y_0)dy = \boldsymbol{Jf}(x_0,y_0)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

benötigt man $\quad (dx,dy) = (x-x_0, y-y_0) = (0.2, 0.1) \quad$ und

$$\boldsymbol{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} f_{1,x}(x,y) & f_{1,y}(x,y) \\ f_{2,x}(x,y) & f_{2,y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(0.2,0.1) \approx \boldsymbol{g}(0.2,0.1) := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(0.2,0.1) = (0.2+0.1+1, (0.2)^2 - 0.1 - 1)^T = (1.3, -1.06)^T$$

$$\Rightarrow \quad ||\boldsymbol{f}(0.2,0.1) - \boldsymbol{g}(0.2,0.1)|| = \left\| \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix} \right\| = 0.04$$

Taylor-Entwicklung:

Gegeben sei eine m-mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D offen und konvex ist, $m,n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Dann heißt

$$T_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) := \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\nabla\right)^j f\right)(\boldsymbol{x}_0)$$

Taylorpolynom m-ten Grades von f zum **Entwicklungspunkt** $\boldsymbol{x}_0$.

Dabei wird $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})^T$ als **Nabla-Operator** bezeichnet.

Satz von Taylor:

Ist f $(m+1)$-mal stetig partiell differenzierbar, so gilt für die **Taylorentwicklung**

$$f(\boldsymbol{x}) = T_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) + R_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0)$$

die folgende **Restgliedformel nach Lagrange**

$$R_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\nabla\right)^{(m+1)} f\right)(\boldsymbol{\xi}) \,,$$

dabei liegt $\boldsymbol{\xi}$ auf der Geraden zwischen $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}$, es gilt also $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ mit $0 < \theta < 1$.

Beispiele:

a)
$$\begin{aligned} T_2(x,y;x_0,y_0) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\qquad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\big) \\ R_2(x,y;x_0,y_0) &= \frac{1}{3!}\big(f_{xxx}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^2(y-y_0) \\ &\qquad + 3f_{xyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(\xi_1,\xi_2)(y-y_0)^3\big) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & T_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = f(x_0,y_0,z_0) \\ & + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\ & + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 + f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 \\ & \quad + 2f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) + 2f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) \\ & \quad + 2f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)\big) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} T_3(x,y;x_0,y_0) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\qquad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\big) \\ &\quad + \frac{1}{6}\big(f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) \\ &\qquad + 3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(x,y;x_0,y_0) &= \frac{1}{4!}\big(f_{xxxx}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^4 + 4f_{xxxy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^3(y-y_0) \\ &\qquad + 6f_{xxyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^2(y-y_0)^2 \\ &\qquad + 4f_{xyyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)(y-y_0)^3 + f_{yyyy}(\xi_1,\xi_2)(y-y_0)^4\big) \end{aligned}$$

Aufgabe 12:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x,y,z) = 1 + z + xy + x^2(1-y)^2 + (y+z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0,0,0)$.

b) Für die durch

$$f(x,y) = (x+1)^2 + x\sin(x+y)$$

definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x,y) = (\pi, \pi)$ verwendet, nach oben ab.

Lösung:

a)

$$f(x,y,z) = 1 + z + xy + x^2(1-y)^2 + (y+z)^3 \quad \Rightarrow \quad f(0,0,0) = 1$$

$$\begin{array}{ll}
f_x(x,y,z) = y + 2x(1-y)^2 & \Rightarrow \quad f_x(0,0,0) = 0 \\
f_y(x,y,z) = x - 2x^2(1-y) + 3(y+z)^2 & \Rightarrow \quad f_y(0,0,0) = 0 \\
f_z(x,y,z) = 1 + 3(y+z)^2 & \Rightarrow \quad f_y(0,0,0) = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
f_{xx}(x,y,z) = 2(1-y)^2 & \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0,0) = 2 \\
f_{xy}(x,y,z) = 1 - 4x(1-y) & \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0,0) = 1 \\
f_{xz}(x,y,z) = 0 & \Rightarrow \quad f_{xz}(0,0,0) = 0 \\
f_{yy}(x,y,z) = 2x^2 + 6(y+z) & \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0,0) = 0 \\
f_{yz}(x,y,z) = 6(y+z) & \Rightarrow \quad f_{yz}(0,0,0) = 0 \\
f_{zz}(x,y,z) = 6(y+z) & \Rightarrow \quad f_{zz}(0,0,0) = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(x,y,z;0,0,0) \quad &= \quad f(0,0,0) + f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0,0)x^2 + f_{yy}(0,0,0)y^2 + f_{zz}(0,0,0)z^2\right. \\
&\quad \left. + 2f_{xy}(0,0,0)xy + 2f_{xz}(0,0,0)xz + 2f_{yz}(0,0,0)yz\right) \\
&= \quad 1 + z + xy + x^2
\end{aligned}$$

Da der Entwicklungspunkt der Nullpunkt ist, wäre es einfacher gewesen das Polynom auszumultiplizieren und die Terme oberhalb der quadratischen wegzulassen:

$$f(x,y,z) = 1 + z + xy + x^2 \quad - 2yx^2 + x^2y^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \; .$$

b)

$$
\begin{array}{rcll}
f(x,y) &=& (x+1)^2 + x\sin(x+y) & \Rightarrow\ f(0,\pi) = 1 \\
f_x(x,y) &=& 2(x+1) + \sin(x+y) + x\cos(x+y) & \Rightarrow\ f_x(0,\pi) = 2 \\
f_y(x,y) &=& x\cos(x+y) & \Rightarrow\ f_y(0,\pi) = 0 \\
f_{xx}(x,y) &=& 2 + 2\cos(x+y) - x\sin(x+y) & \Rightarrow\ f_{xx}(0,\pi) = 0 \\
f_{xy}(x,y) &=& \cos(x+y) - x\sin(x+y) & \Rightarrow\ f_{xy}(0,\pi) = -1 \\
f_{yy}(x,y) &=& -x\sin(x+y) & \Rightarrow\ f_{yy}(0,\pi) = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y;0,\pi) &= f(0,\pi) + f_x(0,\pi)\,x + f_y(0,\pi)\,(y-\pi) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,\pi)\,x^2 + 2f_{xy}(0,\pi)\,x(y-\pi) + f_{yy}(0,\pi)\,(y-\pi)^2\right) \\
&= 1 + 2x - x(y-\pi)
\end{aligned}
$$

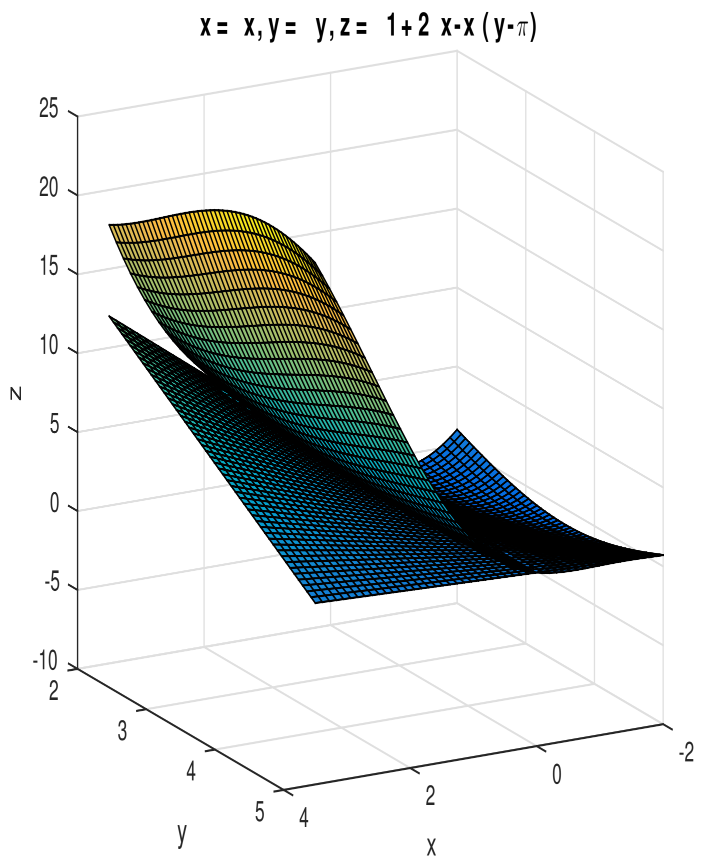

Bild 12: f und T_2 in $[-2,4]\times[2,5]$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$
\begin{array}{rcl}
f_{xxx}(x,y) &=& -x\cos(x+y) - 3\sin(x+y) \\
f_{xxy}(x,y) &=& -x\cos(x+y) - 2\sin(x+y) \\
f_{xyy}(x,y) &=& -x\cos(x+y) - \sin(x+y) \\
f_{yyy}(x,y) &=& -x\cos(x+y).
\end{array}
$$

Die Fehlerabschätzung für $(x, y) = (\pi, \pi)$ zieht mit $\theta \in]0, 1[$ ein $(\xi_1, \xi_2) := (0, \pi) + \theta((\pi, \pi) - (0, \pi)) = (\theta\pi, \pi)$ nach sich. Es gilt also $0 < \xi_1 < \pi$ und $\xi_2 = \pi$.

$$
\begin{aligned}
& |f(\pi,\pi) - T_2(\pi,\pi;0,\pi)| = |R_2(\pi,\pi;0,\pi)| \\
= \quad & \frac{1}{3!}\big|f_{xxx}(\xi_1,\pi)(\pi-0)^3 + 3f_{xxy}(\xi_1,\pi)(\pi-0)^2\cdot(\pi-\pi) \\
& +3f_{xyy}(\xi_1,\pi)(\pi-0)\cdot(\pi-\pi)^2 + f_{yyy}(\xi_1,\pi)(\pi-\pi)^3| \\
= \quad & \frac{1}{3!}|f_{xxx}(\xi_1,\pi)|\cdot|\pi|^3 = \frac{\pi^3|-\xi_1\cos(\xi_1+\pi) - 3\sin(\xi_1+\pi)|}{6} \\
\le \quad & \frac{\pi^3(|-\xi_1|\cdot|\cos(\xi_1+\pi)| + |-3|\cdot|\sin(\xi_1+\pi)|)}{6} \\
\le \quad & \frac{\pi^3(|-\xi_1| + |-3|)}{6} \le \frac{\pi^3(\pi+3)}{6} = 31.7379...
\end{aligned}
$$

Der tatsächliche Fehler lautet

$|f(\pi,\pi) - T_2(\pi,\pi;0,\pi)| = \big|(\pi+1)^2 - (1+2\pi)\big| = 17.1527... - 7.2831... = 9.8696...$