Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Funktionen in mehreren Variablen

Definition:

Eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist, heißt in $\boldsymbol{x}_0 := (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ **partiell differenzierbar nach** x_i, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0) &:= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} . \end{aligned}$$

$f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$ gibt den **Anstieg** von f an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung der Koordinate x_i an.

f heißt **partiell differenzierbar** in D, falls in jedem Punkt von D alle partiellen Ableitungen f_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ existieren.

Gradient: $\quad \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right)^T$

Höhere Ableitungen:

werden wie in $\mathbb{R}$ rekursiv definiert, z.B.: $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

Höhenlinien: (Spezialfall einer Niveaumenge im $\mathbb{R}^n$)

Linien, auf denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstant ist, also $f(x, y) = konst!$ gilt.

Im 'Satz über implizite Funktionen' wird geklärt, ob sich diese Gleichung (lokal) nach Funktionen $y = y(x)$ (Parametrisierung durch x) oder $x = x(y)$ (Parametrisierung durch y) auflösen lässt. Es würde dann $f(x, y(x)) = konst$ oder $f(x(y), y) = konst$ gelten.

Für eine Funktion $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y(x)$ kann der Funktionsgraph durch die Kurve $\mathbf{c}(x) = (x, y(x))^T$ im $\mathbb{R}^2$ parametrisiert werden. Der zugehörige **Tangentialvektor** wird berechnet durch $\mathbf{c}'(x) = (1, y'(x))^T$.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^2 + 2y$.

a) Man zeichne den Funktionsgraphen und einen Höhenlinienplot von f im Definitionsbereich $[-2, 2] \times [-1, 1]$.

b) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

c) Man berechne den Anstieg von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ in x-Richtung und in y-Richtung und zeichne die Funktionsgraphen der Funktionen $f(x, 0)$ in $[-2, 2]$ und $f(0, y)$ in $[-1, 1]$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0, 0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(0, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0, 0)$.

Lösung:

a) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot mit Höhenlinien lautet:

```
ezgraph3('surfc','x','y','3*x^2+2*y',[-2,2,-1,1])
```

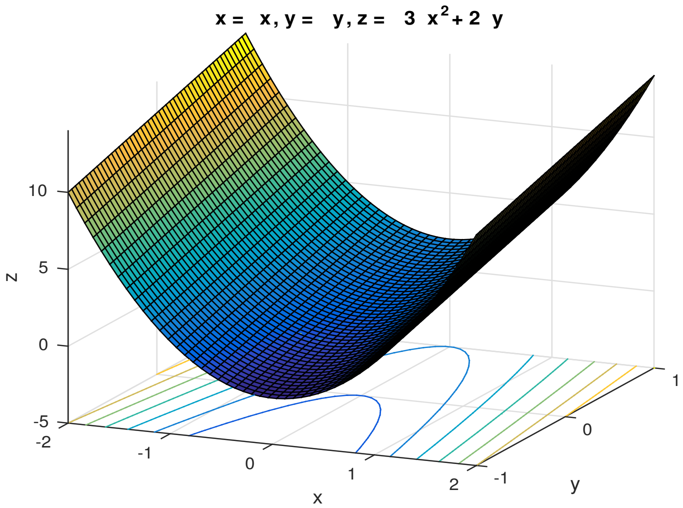

Bild 5 a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y$, $f_x(x, y) = 6x$, $f_y(x, y) = 2$,

$f_{xx}(x, y) = 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 0$,

$f_{xxx}(x, y) = 0$, $f_{xxy}(x, y) = 0$, $f_{xyy}(x, y) = 0$, $f_{yyy}(x, y) = 0$

c) Anstiege von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$:

in x-Richtung: $f_x(0,0) = 0$, in y-Richtung: $f_y(0,0) = 2$

Die Mathematica-Befehle für die Funktionsplots lauten:

```
Plot[3 x^2, {x, -2, 2}, AxesLabel -> {"x", "f(x,0)"}]
Plot[2 y, {y, -1, 1}, AxesLabel -> {"y", "f(0,y)"}]
```

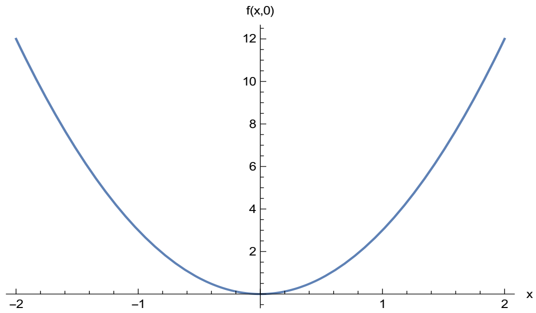

Bild 5 c.1): $f(x,0) = 3x^2$

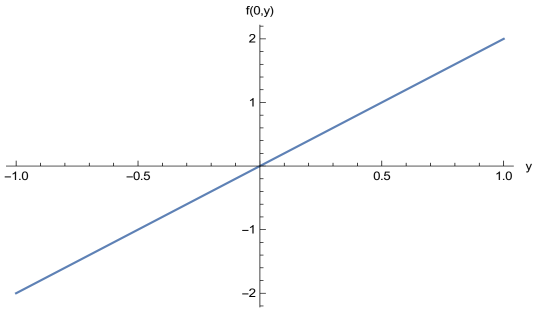

Bild 5 c.2): $f(0,y) = 2y$

d) Die Funktionsauswertung in $(0,0)$ ergibt $f(0,0) = 0$.

Die Höhenlinie durch $(0,0)$ wird also beschrieben durch die implizite Gleichung

$$0 = f(x, y(x)) = 3x^2 + 2y(x)\,.$$

Durch Auflösen nach y erhält man $y(x) = -\dfrac{3x^2}{2}$.

Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\dfrac{3x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

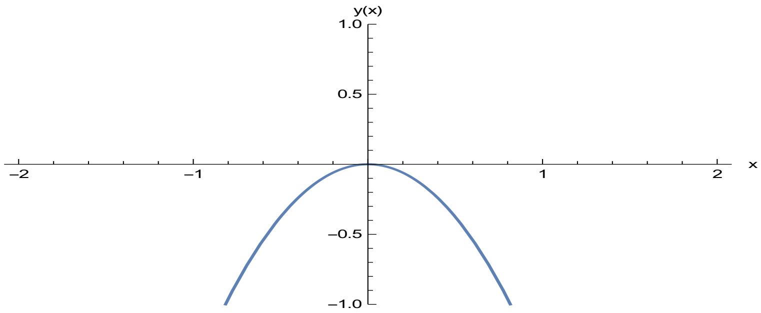

Bild 5 d): $y(x) = -\dfrac{3x^2}{2}$

e) $\operatorname{grad} f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))^T = (0,2)^T$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \operatorname{grad} f(0,0), \mathbf{c}'(0)\rangle}{||\operatorname{grad} f(0,0)||_2\, ||\mathbf{c}'(0)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Jacobi-Matrix und Hesse-Matrix:

Definition:
Eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist, heißt **stetig partiell differenzierbar** in D, wenn alle partiellen Ableitungen in D existieren und stetig sind. Im Fall $n = 2$ gilt dann beispielsweise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_x(x,y) = f_x(x_0,y_0)\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_y(x,y) = f_y(x_0,y_0)\,.$$

Satz von Schwarz:
Für reellwertige zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{für} \quad 1 \le i, j \le n\,.$$

Definition: (Hesse-Matrix)
Für eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die zweimal partiell differenzierbar ist, bezeichnet

$$\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f.

Sind alle zweiten partiellen Ableitungen stetig, dann ist $\boldsymbol{H}$ symmetrisch.

Definition:
Eine vektorwertige Abbildung $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))^T$$

heißt partiell differenzierbar, falls alle f_j, $j = 1, \ldots, m$ in D partiell differenzierbar sind.

Definition: (Jacobi-Matrix)
Für eine vektorwertige Abbildungen $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ nennt man

$$\boldsymbol{J f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_{1,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{1,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{m,x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}^T f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}^T f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

die **Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$.

Aufgabe 6:

Man berechne die Jacobi-Matrizen und, falls dies möglich ist, die Hessematrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

a) $f(x, y) = \ln(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

c) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

d) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) $f(x, y) = \ln(y) + \cos(xy)$,

Jacobi-Matrix:

$$\boldsymbol{J}f(x, y) = (f_x, f_y) = \ \text{grad}^T f(x, y) = \left(-y\sin(xy), \frac{1}{y} - x\sin(xy)\right)$$

Hesse-Matrix:

$$\boldsymbol{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2\cos(xy) & -xy\cos(xy) - \sin(xy) \\ -xy\cos(xy) - \sin(xy) & -\dfrac{1}{y^2} - x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$,

Jacobi-Matrix:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))^T = \boldsymbol{g}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^T$$

c) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$,

Jacobi-Matrix:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} h_{1\varphi} & h_{1\psi} \\ h_{2\varphi} & h_{2\psi} \\ h_{3\varphi} & h_{3\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi\cos\psi & -2\cos\varphi\sin\psi \\ 2\cos\varphi\cos\psi & -2\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & 2\cos\psi \end{pmatrix}$$

d) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$, und $x, y, z \in \mathbb{R}$,

Jacobi-Matrix:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5}{x^4+y^4} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man zeige, dass f in $(x_0, y_0) = (0,0)$ stetig ist.

c) Man berechne die Jacobi-Matrix für f.

d) Sind die partiellen Ableitungen im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ stetig?

Lösung:

a)

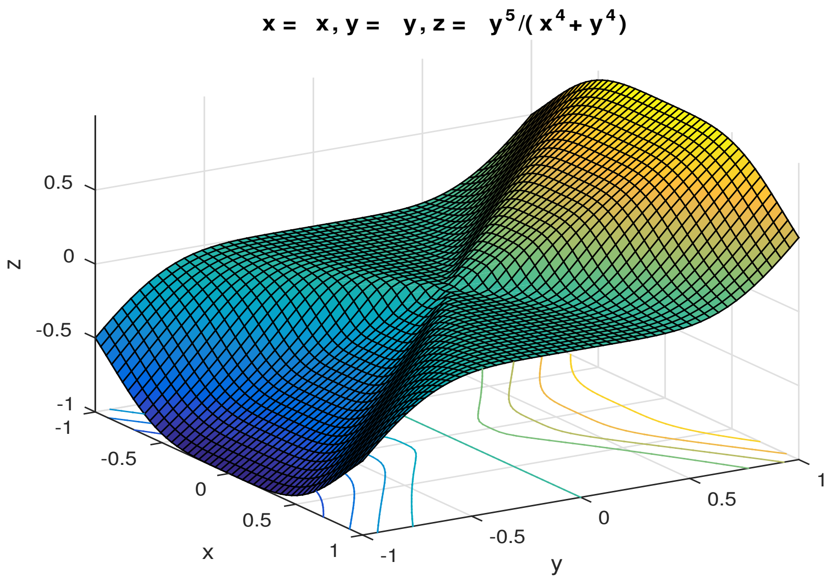

Bild 7: $\quad f(x,y) = \dfrac{y^5}{x^4+y^4}$

b) Der Funktionswert $f(0,0) = 0$ ist die stetige Ergänzung in $(0,0)$ von $f(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$, denn

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^5}{x^4+y^4}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \left|\frac{y^4}{x^4+y^4}\right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \left|\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0\,. \end{aligned}$$

c) Für $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ erhält man die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{J}f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \ \mathrm{grad}^T f(x,y) = \left(-\frac{4x^3y^5}{(x^4+y^4)^2}, \frac{5x^4y^4+y^8}{(x^4+y^4)^2}\right),$$

mit stetigen f_x und f_y.

Da $\boldsymbol{J}f(x,y)$ in $(0,0)$ eine Definitionslücke besitzt, müssen die partiellen Ableitungen über den Differentialquotienten direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0^5}{h^4+0^4} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5}{0^4+h^4} = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Man erhält $\boldsymbol{J}f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,1)$.

d) Die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ sind nicht stetig, denn beispielsweise für die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} f_x\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{4(1/n)^3(1/n)^5}{((1/n)^4+(1/n)^4)^2} = -1 \neq 0 = f_x(0,0)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_y\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5(1/n)^4(1/n)^4+(1/n)^8}{((1/n)^4+(1/n)^4)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq 1 = f_y(0,0)\,.$$

Richtungsableitung:

Gegeben seien eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei D eine offene Menge ist, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ und ein Richtungsvektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

Die **Ableitung von f in $\boldsymbol{x}_0$ längs der Richtung $\boldsymbol{a}$** wird im Falle der Existenz des folgenden Grenzwertes definiert durch

$$D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h} \ .$$

Gilt $||\boldsymbol{a}|| = 1$, so gibt $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ den **Anstieg** von f an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung $\boldsymbol{a}$ an.

Partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen.

Wählt man als Richtungsvektor $\boldsymbol{a}$ den i.ten Koordinatenvektor $\boldsymbol{e}_i$, d.h.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dann gilt $D_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

Satz: (Berechnungsformel)

Ist f in $\boldsymbol{x}_0$ stetig partiell differenzierbar, so kann die Richtungsableitung berechnet werden durch

$$D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \langle \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{a} \rangle \ .$$

Speziell erhält man damit wieder $D_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}_0) = \langle \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{e}_i \rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$.

Aufgabe 8:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Lösung:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, kann die Richtungsableitung in (x_0, y_0) folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0) = <\text{grad } f(x_0, y_0), \boldsymbol{h}> = (2x_0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x_0 h_1 + h_2$$

Die Gerade $2x + 7y = 3$ in Parameterform lautet:

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/7 - 2x/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\boldsymbol{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\boldsymbol{h} = \pm \frac{7}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (2, -3)$ lautet daher

$$D_{\boldsymbol{h}} f(2, -3) = 4h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{28}{\sqrt{53}} - \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = \pm \frac{26}{\sqrt{53}} \,.$$