Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Vektorwertige Folgen und Konvergenz

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition:

Unter einer **Folge** $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Abbildung der Form

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^n \\ k & \mapsto & \boldsymbol{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}. \end{array}$$

$(a_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ wird als j**.te Koordinatenfolge** bezeichnet.

Beispiele für Normen im $\mathbb{R}^n$: $\quad \boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}||_1 &:= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ ||\boldsymbol{x}||_2 &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ ||\boldsymbol{x}||_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{aligned}$$

Definition:

Eine vektorwertige Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen den **Grenzwert** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn $(||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}||)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. wenn $\lim\limits_{k\to\infty} ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}|| = 0$ bzw. $||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}|| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. Man schreibt dann auch $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{a}_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{a}$.

Normenäquivalenzsatz:

Je zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. es gibt zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$C_1||\boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{x}||' \leq C_2||\boldsymbol{x}|| \,.$$

Folgerungen:

a) Konvergiert die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ bzgl. einer speziellen Norm gegen den Grenzwert $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert sie auch gegen $\boldsymbol{a}$ in jeder anderen Norm.

b) Im $\mathbb{R}^n$ konvergiert die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen konvergieren.

c) Im $\mathbb{R}^n$ kann der Grenzwert einer Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koordinatenweise berechnet werden.

Aufgabe 1:

Man untersuche die Konvergenz der angegebenen Folgen

a) $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1+1/n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $\boldsymbol{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Lösung:

a) Eine Folge im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann, wenn die Koordinatenfolgen konvergieren. Der Grenzwert lässt sich dann koordinatenweise berechnen.

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1+1/n \end{pmatrix}$$

Zur Konvergenz der Koordinatenfolge $x_n = n^2/2^n$:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{4}{4} = 1,\ x_3 = \frac{9}{8},\ x_4 = \frac{16}{16} = 1,\ x_5 = \frac{25}{32},\ x_6 = \frac{36}{64}$$

Zunächst halten wir fest, dass $x_n \geq 0$ gilt.

Aufgrund der Entwicklung der ersten Folgenglieder vermuten wir, dass die Folge ab $n = 3$ monoton fällt, d.h. es gilt $x_n \geq x_{n+1}$, und beweisen dies direkt.

Für $n \geq 3$ gilt

$$2 \leq (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 \leq n^2 \,.$$

Damit ergibt sich

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{2 \cdot 2^n} \leq \frac{n^2+n^2}{2 \cdot 2^n} = x_n$$

Damit konvergiert (x_n). Dass der Grenzwert Null ist, kann einfach über l´Hospital berechnet werden, soll hier jedoch nicht ausgeführt werden.

Für die zweite Koordinatenfolge gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n) = 1$

Da beide Koordinatenfolgen konvergieren, konvergiert $(\boldsymbol{a}_n)$.

b) Im $\mathbb{R}^n$ sind die Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ äquivalent.

Daher sind Konvergenz und Grenzwert einer Folge normunabhängig.

Um die Konvergenz einer gegebenen Folge nachzuweisen, reicht es also aus, sie in einer geeigneten Norm nachzuweisen.

Wir vermuten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_{n+1} := \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathbf{0} =: \boldsymbol{a}$$

gilt und versuchen die Konvergenz über die Definition, d.h.

$$||\boldsymbol{a}_{n+1} - \boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{a}_{n+1}|| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

nachzuweisen. Für die obigen Normen ergibt sich

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{a}_{n+1}||_1 &= \frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{3}} + \frac{|x_n + y_n|}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}(|x_n| + |y_n| + |x_n| + |y_n|) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}||\boldsymbol{a}_n||_1 \le \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 ||\boldsymbol{a}_{n-1}||_1 \le \cdots \le \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n ||\boldsymbol{a}_1||_1 \overset{n\to\infty}{\to} \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{a}_{n+1}||_\infty &= \max\{\frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{3}}, \frac{|x_n + y_n|}{\sqrt{3}}\} \le \max\{\frac{|x_n| + |y_n|}{\sqrt{3}}\} \\
&\le \frac{2}{\sqrt{3}} \max\{|x_n|, |y_n|\} = \frac{2}{\sqrt{3}}||\boldsymbol{a}_n||_\infty \quad \text{(siehe oben)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{a}_{n+1}||_2 &= \sqrt{\left(\frac{x_n - y_n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x_n + y_n}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x_n^2 + 2y_n^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}||\boldsymbol{a}_n||_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 ||\boldsymbol{a}_{n-1}||_2 \\
&\vdots \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n ||\boldsymbol{a}_1||_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\boldsymbol{a}_n$ in der $||\cdot||_2$ Norm und damit in $\mathbb{R}^2$.

Definition:

a) Für $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ heißt

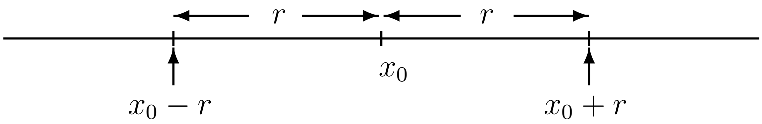
$$K_{\boldsymbol{x}_0,r} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| < r\}$$

offene und

$$\overline{K}_{\boldsymbol{x}_0,r} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \leq r\}$$

abgeschlossene Kugelumgebung um $\boldsymbol{x}_0$ mit Radius r.

Beispiel: $x_0 \in \mathbb{R}$, $K_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$.



b) Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ **innerer Punkt** von D, falls es eine $K_{\boldsymbol{x}_0,r}$ Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ gibt, für die $K_{\boldsymbol{x}_0,r} \subset D$ gilt.

c) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge D, falls es für jede $K_{\boldsymbol{x}_0,r}$ Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ mindestens einen Punkt $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}_0$ mit $\tilde{\boldsymbol{x}} \in K_{\boldsymbol{x}_0,r} \cap D$ gibt.

d) $\boldsymbol{x}_0$ heißt **Randpunkt** von D, falls in jeder $K_{\boldsymbol{x}_0,r}$ Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ sowohl ein Punkt aus D liegt, als auch ein Punkt aus $\mathbb{R}^n \backslash D$ liegt.

e) Man bezeichnet mit D^0 die **Menge der inneren Punkte**, mit D' die **Menge der Häufungspunkte** und mit ∂D die **Menge der Randpunkt** von D .

f) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn $D = D'$ gilt, d.h. D nur aus inneren Punkten besteht.

g) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\partial D \subset D$ gilt, d.h. D alle seine Randpunkte enthält.

h) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt

$$||\boldsymbol{x}|| \leq C \, .$$

i) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist.

Aufgabe 2:

Man zeichne die folgenden Mengen und prüfe, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

a) $R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| \leq 2 \right\}$,

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1,\ x < y \right\}$,

c) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 4 \,,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \right\}$,

d) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 \leq 17 \,,\ 1 < z \leq 11 \right\}$.

Lösung:

a) $|x| + |y| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 2 - |y| \quad \Leftrightarrow \quad |y| - 2 \leq x \leq 2 - |y|$

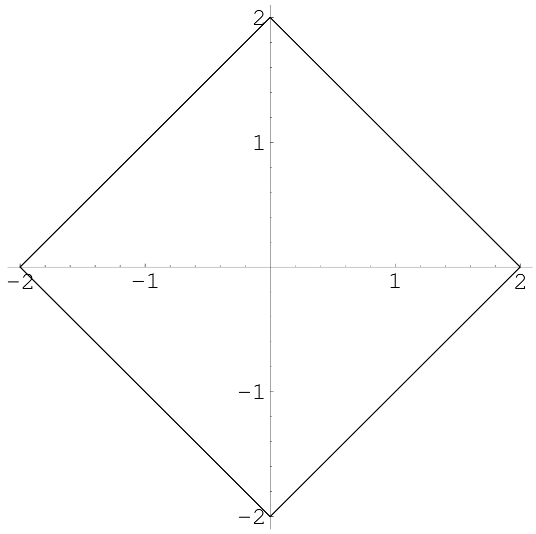


Bild 2 a) Raute R

R ist abgeschlossen, da alle Randpunkte zu R gehören. R ist beschränkt und damit dann auch kompakt.

b)

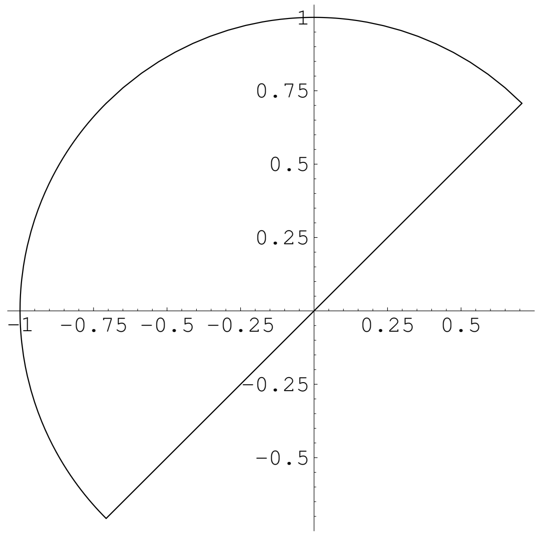


Bild 2 b) Halbkreis H ohne Rand

H ist offen, da kein Randpunkt zu H gehört. H ist beschränkt.

c) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','r*cos(t)','r*sin(t)','4-r^2',[0,2,0,2*pi])
```

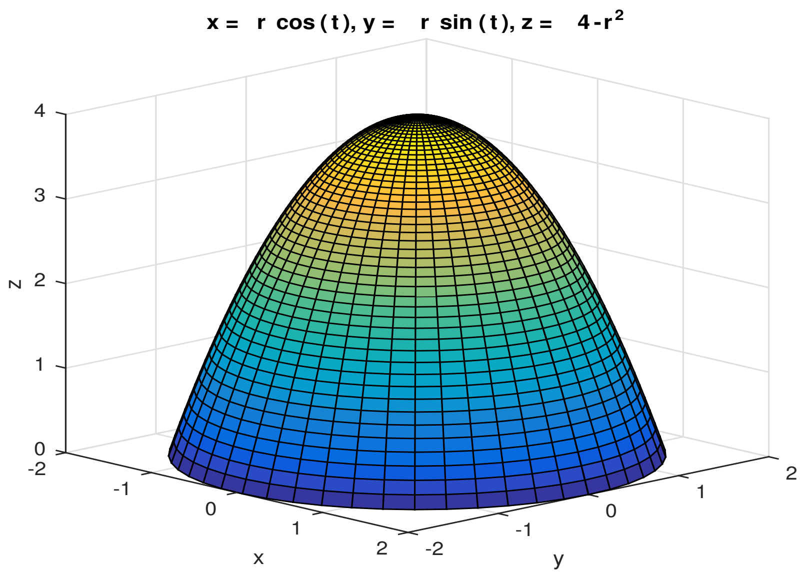


Bild 2 c) Rotationsparaboloid P.

P ist abgeschlossen, da alle Randpunkte zu P gehören. P ist beschränkt und damit dann auch kompakt.

d)

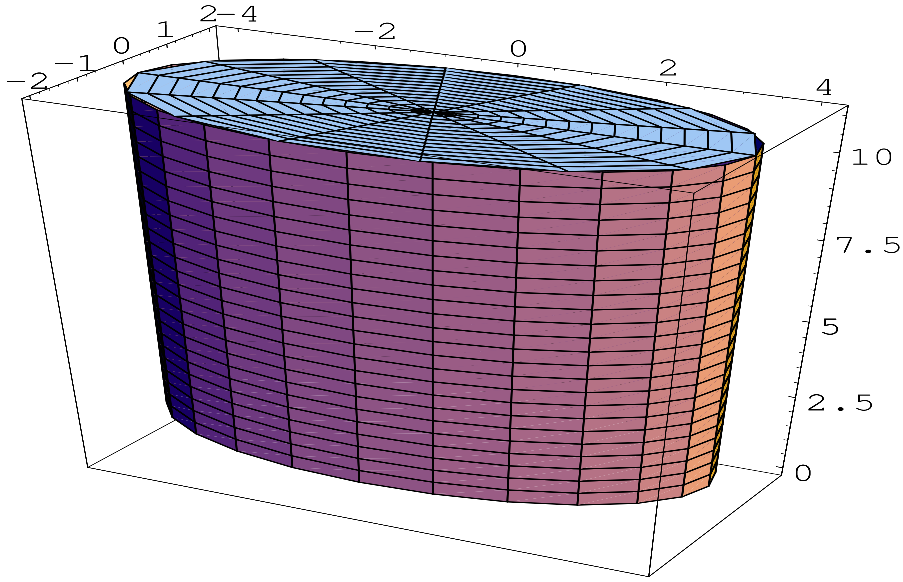


Bild 2 d) elliptischer Zylinder Z

Z ist weder offen noch abgeschlossen, da nur die Randpunkte für $z = 1$ nicht zu Z gehören. Z ist beschränkt aber nicht kompakt.

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition:
Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : [a,b] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heißt **Kurve** bzw. **Parameterdarstellung einer Kurve**. t heißt der **Parameter** und $[a,b]$ das **Parameterintervall**.

$\mathbf{c}(a) = (x_1(a), \cdots, x_n(a))^T$ heißt **Anfangspunkt** und

$\mathbf{c}(b) = (x_1(b), \cdots, x_n(b))^T$ **Endpunkt** der Kurve.

Gilt für alle $t \in [a,b]$ $\quad \dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow ||\dot{\mathbf{c}}(t)|| = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \cdots + \dot{x}_n^2(t)} > 0$, so bezeichnet man $\mathbf{c}$ auch als **reguläre** oder **glatte Kurve**.

Beispiele für Parameterdarstellungen

a) **Geradengleichung im $\mathbb{R}^n$**

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{r}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor: $\boldsymbol{a}$, Richtungsvektor: $\boldsymbol{r}$

Soll die Gerade durch die beiden Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ verlaufen, so kann $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ gewählt werden.

b) **Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$**

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 6\pi]\,,\ a \in \mathbb{R}.$$

```
ezplot3('cos(t)','sin(t)','t',[0,6*pi])
```

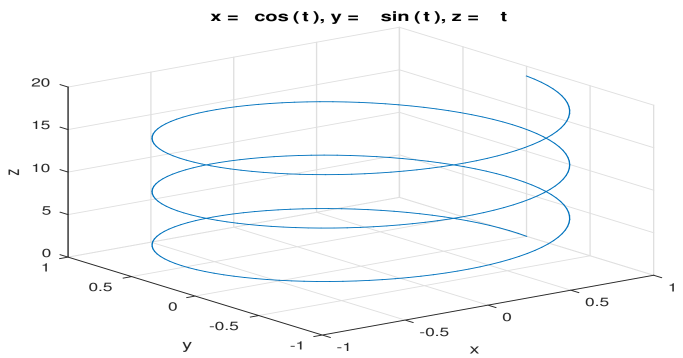


Bild Schraubenlinie c

Definitionen:

a) Der Vektor
$$\boldsymbol{t}(t) := \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{||\dot{\mathbf{c}}(t)||}$$
heißt **Tangenteneinheitsvektor** der Kurve $\mathbf{c}$ an der Parameterstelle t.

b) Die **Bogenlänge** einer Kurve $\mathbf{c}$ im Intervall $[a,t]$ berechnet man durch
$$s(t) = \int\limits_a^t ||\dot{\mathbf{c}}(\tau)||\, d\tau \quad (> 0)\,.$$
Als **Bogenelement** bezeichnet man $ds := ||\dot{\mathbf{c}}(t)||\, dt$.

Die Parameterdarstellung der **Tangentengleichung** im Punkt $\mathbf{c}(t)$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, also die Geradengleichung in Orts- und Richtungsvektordarstellung, lautet
$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{c}(t) + \lambda\, \dot{\mathbf{c}}(t)\,.$$

Kurven im $\mathbb{R}^3$

Wegen $<\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{t}(t)>= 1 \;\Rightarrow\; 2 <\boldsymbol{t}(t), \dot{\boldsymbol{t}}(t)>= 0$ stehen $\dot{\boldsymbol{t}}(t)$ und $\boldsymbol{t}(t)$ senkrecht aufeineinander.

Damit erhält man die zum Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}(t)$ senkrechten Vektoren der Länge 1:

Hauptnormalenvektor $\boldsymbol{n}(t) := \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}(t)}{||\dot{\boldsymbol{t}}(t)||}$

Binormalenvektor $\boldsymbol{b}(t) := \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$.

Definitionen:

a) **Schmiegebene** $\boldsymbol{S}$ an der Stelle t
$$\mathbf{S}(\lambda, \mu) = \mathbf{c}(t) + \lambda\, \boldsymbol{t}(t) + \mu\, \boldsymbol{n}(t)\,.$$

b) **Krümmungsvektor** der Kurve an der Stelle t
$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\boldsymbol{t}(t_1) - \boldsymbol{t}(t)}{s(t_1) - s(t)} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\frac{\boldsymbol{t}(t_1) - \boldsymbol{t}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}(t)}{\dot{s}(t)}.$$

c) Als **Krümmung** der Kurve an der Stelle t wird die Länge des dortigen Krümmungsvektors bezeichnet (beachte $\dot{s}(t) = ||\dot{\mathbf{c}}(t)||$):
$$\kappa(t) := \frac{||\dot{\boldsymbol{t}}(t)||}{||\dot{\mathbf{c}}(t)||}\,.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeichne die Kurve $\mathbf{c}$.

b) Man berechne für $\mathbf{c}$ die Bogenlänge und gebe die Tangentengleichung im Punkt $t = \pi/2$ an.

c) Man berechne für $\mathbf{c}$ den Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor.

d) Im Punkt $t = \pi/2$ gebe man die Parameterform der Schmiegebene an und berechne dort den Krümmungsvektor und die Krümmung.

Lösung:

a) MATLAB-Plotbefehl

```
ezplot3('2*cos(t)','2*sin(t)','3',[0,2*pi])
```

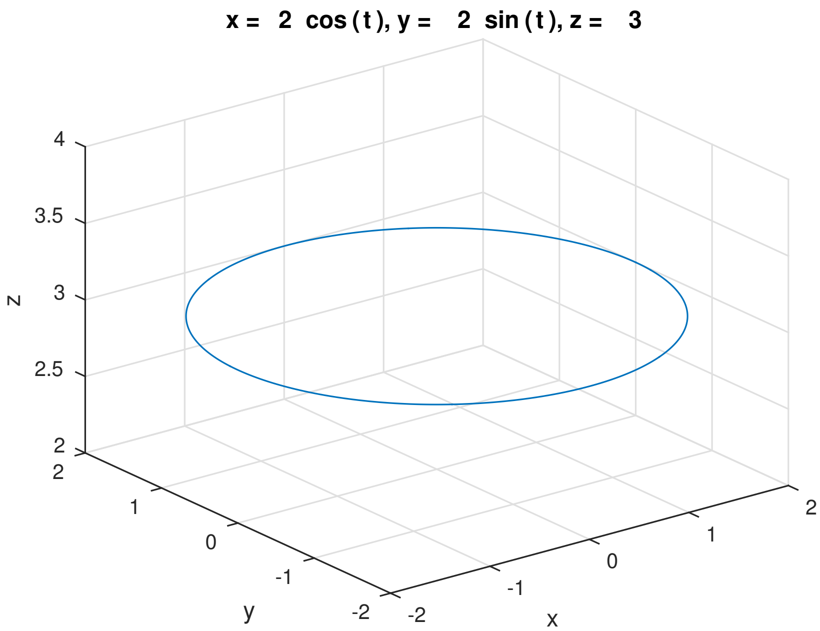


Bild 3 Kreis c

b) $\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

Bogenelement: $||\dot{\mathbf{c}}(t)|| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$

Bogenlänge: $s = \int\limits_0^{2\pi} ||\dot{\mathbf{c}}(\tau)||\, d\tau = \int\limits_0^{2\pi} 2\, d\tau = 4\pi$

Tangentengleichung im Punkt $t = \pi/2$:

$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{c}(\pi/2) + \lambda\, \dot{\mathbf{c}}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Tangenteneinheitsvektor: $\boldsymbol{t}(t) := \dfrac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{||\dot{\mathbf{c}}(t)||} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{t}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad ||\dot{\boldsymbol{t}}(t)|| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = 1$

Hauptnormalenvektor: $\boldsymbol{n}(t) := \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}(t)}{||\dot{\boldsymbol{t}}(t)||} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

Binormalenvektor:

$$\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Schmiegebene:

$$\mathbf{S}(\lambda, \mu) = \mathbf{c}(\pi/2) + \lambda\, \boldsymbol{t}(\pi/2) + \mu\, \boldsymbol{n}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Krümmungsvektor: $\dfrac{1}{||\dot{\mathbf{c}}(\pi/2)||}\, \dot{\boldsymbol{t}}(\pi/2) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Krümmung: $\kappa(\pi/2) := \dfrac{||\dot{\boldsymbol{t}}(\pi/2)||}{||\dot{\mathbf{c}}(\pi/2)||} = \dfrac{1}{2}\,.$

Funktionen

Definition:

Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) $\boldsymbol{f}$ der reellen vektorwertigen Veränderlichen $\boldsymbol{x}$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ des **Definitionsbereiches** D genau den Vektor $\boldsymbol{f}(x) \in W \subset \mathbb{R}^m$ aus dem **Wertebereich** W zuordnet:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{f} : D & \to & W \\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T & \mapsto & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))^T \, . \end{array}$$

Andere Bezeichnungen für D bzw. W sind **Urbildbereich** bzw. **Bildbereich**.

Spezialfälle

a) $n = m = 1$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen

b) $n = 1, m > 1$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$,
vektorwertige Funktion einer reellen Veränderlichen (Kurve)

c) $n > 1, m = 1$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
reellwertige Funktion mehrerer reeller Veränderlicher

d) $n > 1, m > 1$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
vektorwertige Funktion mehrerer reeller Veränderlicher

Höhenlinien: (Spezialfall einer Niveaumenge im $\mathbb{R}^n$)

Linien, auf denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstant ist, also $f(x, y) = \mathit{konst}!$ gilt.

Funktionsgraph von $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: ('Fläche' im $\mathbb{R}^3$)

$\operatorname{graph}(f) := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \, , \ z = f(x, y) \right\}$

Definition:

a) Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.
f heißt **stetig** in $\boldsymbol{x}_0 \in D$, wenn für alle vektorwertigen Folgen $(\boldsymbol{x}_n) \in D \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}_0) \, .$$

b) Sei $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion.
$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ heißt **stetig** in $\boldsymbol{x}_0 \in D$, wenn für alle vektorwertigen Folgen $(\boldsymbol{x}_n) \in D \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f_j(\boldsymbol{x}_n) = f_j(\boldsymbol{x}_0), \quad j = 1, \ldots m \, .$$

Beispiele: elementare stetige Funktionen und deren Verkettung sind im Definitionsbereich stetig.

Aufgabe 4:

Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \to f(x,y)$$

zeichne man den Funktionsgraphen und die Höhenlinien, dies sind Linien konstanter Höhe, d.h. von der Form $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$. Man überprüfe, ob f stetig ist oder in eventuell vorhandenen Definitionslücken stetig ergänzt werden kann.

a) $f(x,y) = y - x\,,$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = xy\,,$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\,,$

e) $f(x,y) = \dfrac{y^5}{x^4 + y^4}\,.$

Lösung:

a) MATLAB-Plotbefehl

```
ezgraph3('surfc','x','y','y-x',[-1,1,-1,1])
```

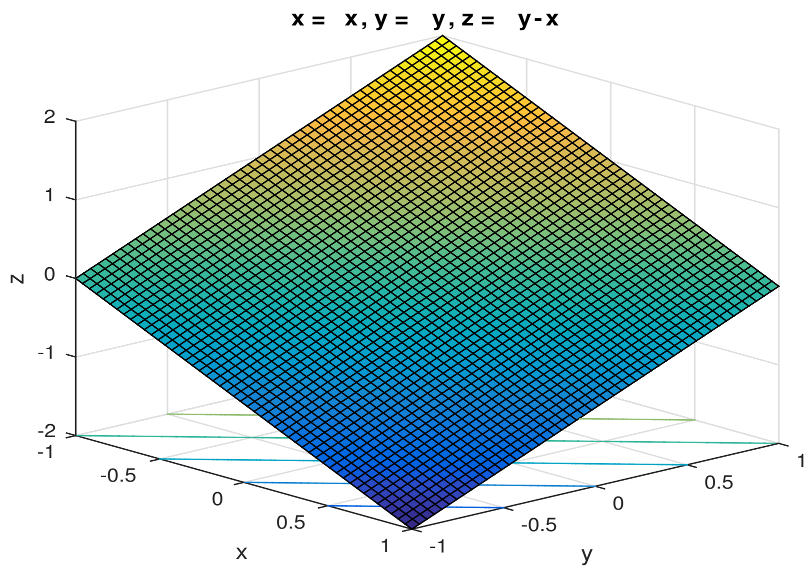


Bild 4 a) Ebene: $f(x,y) = y - x$

f setzt sich aus Polynomen zusammen und ist damit stetig.

b) MATLAB-Plotbefehl

```
ezgraph3('surfc','r*cos(t)','r*sin(t)','r',[0,2,0,2*pi])
```

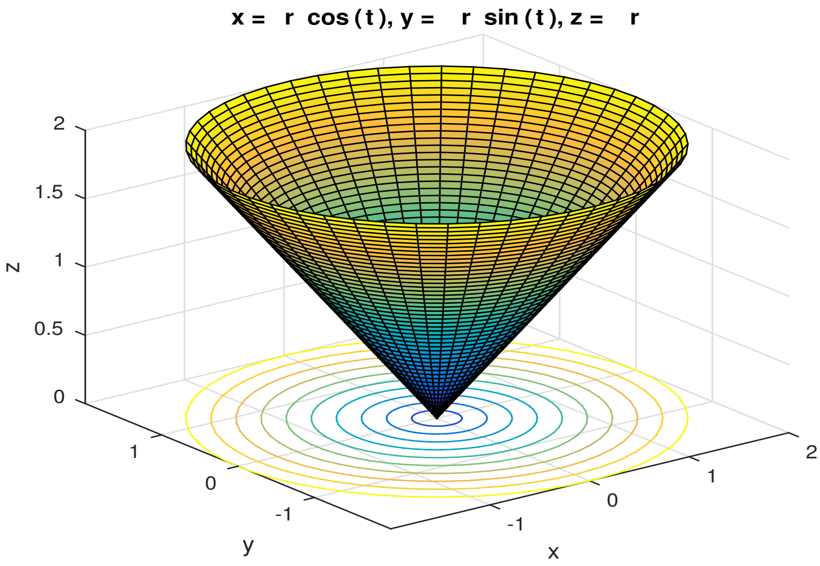


Bild 4 b) Kegel: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

f setzt sich aus stetigen Funktionen ohne Definitionslücken zusammen und ist damit stetig.

c) MATLAB-Plotbefehl

```
ezgraph3('surfc','x','y','x*y',[-1,1,-1,1])
```

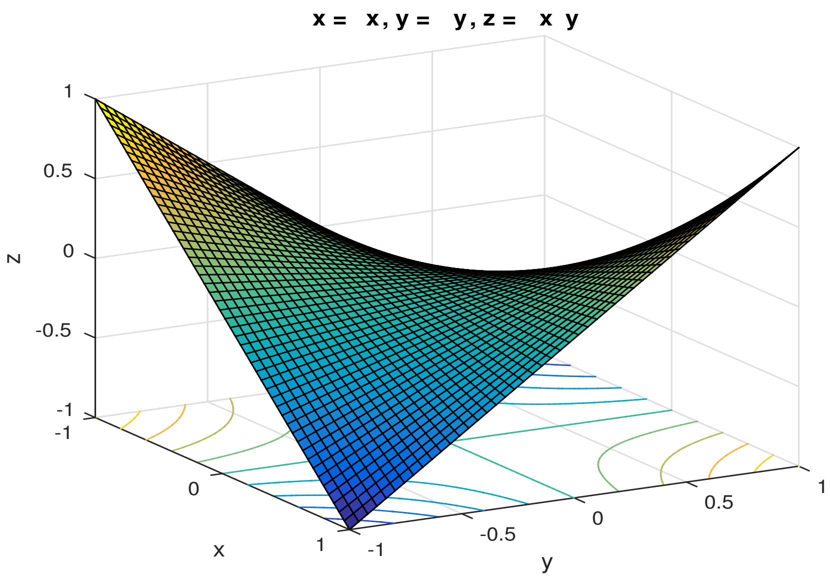


Bild 4 c) Sattel: $f(x,y) = xy$

f setzt sich aus Polynomen zusammen und ist damit stetig.

d) MATLAB-Plotbefehl

```
ezgraph3('surfc','x','y','x^2/(x^2+y^2)',[-1,1,-1,1])
```

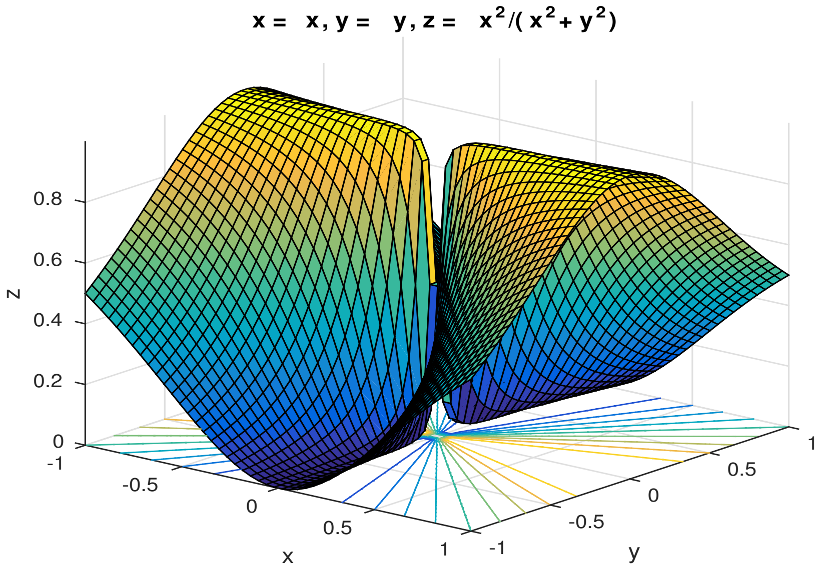


Bild 4 d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, Definitionslücke bei $(x,y) = (0,0)$

f setzt sich aus stetigen Funktionen zusammen und ist bis auf die Nennernullstelle in $(0,0)$ stetig.

Eine stetige Ergänzung in $(0,0)$ ist nicht möglich, denn für die Folgen

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \overset{n\to\infty}{\to} (0,0) \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} (0,0)$$

gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

und

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0^2}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0\,.$$

e) MATLAB-Plotbefehl

```
ezgraph3('surfc','x','y','y^5/(x^4+y^4)',[-1,1,-1,1])
```

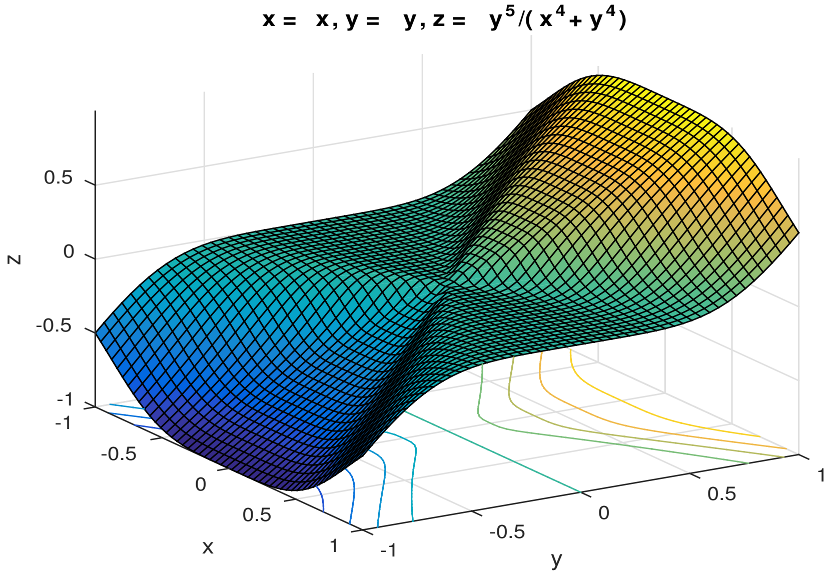


Bild 4 e) $f(x,y) = \dfrac{y^5}{x^4+y^4}$, Definitionslücke bei $(x,y) = (0,0)$

f setzt sich aus stetigen Funktionen zusammen und ist bis auf die Nennernullstelle in $(0,0)$ stetig.

f kann in $(0,0)$ stetig ergänzt werden durch $f(0,0) = 0$, denn

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^5}{x^4+y^4}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \left|\frac{y^4}{x^4+y^4}\right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \left|\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0\,. \end{aligned}$$