

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Funktion, hinreichende OptBedingungen

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien 2mal stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit $\text{rang}(h'(x)) = m$ für jedes $x \in D$.

Es gelte

$$\nabla L(x, \mu) = 0$$

und

$$w^t \nabla_{xx} L(x, \mu) w > (<) 0 \text{ für alle } w \in \ker Dh(x).$$

Dann ist x striktes lokales Minimum (Maximum) von f unter $h = 0$.

Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

Betrachte zu $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x) = 0.$$

Das numerische Lösungsverfahren der Wahl für solche Gleichungen ist das Newton Verfahren

- 1) Wähle Startwert $x^0 \in D$, setze $k = 0$.
- 2) Ist $f(x^k) = 0$, STOP (mit $x = x^k$ gilt $f(x) = 0$).
- 3) Berechne x^{k+1} aus x^k gemäß

$$f'(x^k)\delta x = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \delta x$$

- 4) $k = k+1$, gehe zu 2).

Auf dem Rechner: $f(x^k) = 0$ ist zu ersetzen durch ein geeignetes Abbruchkriterium.

Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren, Konvergenz

Satz 5.18: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\bar{x} \in \overset{\circ}{D}$. Weiterhin sei $f'(x)$ für jedes $x \in D$ regulär. Es gibt eine Umgebung U von \bar{x} , so dass die NEWTON-Folge $x^1, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots$ von einem beliebigen $x^0 \in U$ ausgehend gegen die Nullstelle \bar{x} von f konvergiert.

Die Konvergenz ist quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $k = 1, 2, 3, \dots$

$$|x^k - \bar{x}| \leq C|x^{k-1} - \bar{x}|^2$$

gilt.