

Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



Wintersemester 2016/2017

Beachtenswertes

- Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- **Übungsaufgaben** → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Vettors, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>**

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punkt Mengen im \mathbb{R}^n

Def. 5.1: Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \text{ heißt Länge von } \mathbf{x},$$

$d = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ heißt Abstand zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Def. 5.2: Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

heißt offene Kugelumgebung des Punktes \mathbf{x}_0 mit dem Radius r ,

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

entsprechende abgeschlossene Kugelumgebung des Punktes \mathbf{x}_0 mit dem Radius r .

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punkt Mengen im \mathbb{R}^n

Def. 5.3: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn zu jedem Element $x \in M$ eine **Umgebung** $K_{x,r}$ gefunden werden kann, die in der Menge M liegt, also $K_{x,r} \subset M$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt **innerer Punkt** der Menge M , wenn eine **Umgebung** $K_{x,r}$ existiert, die ganz in der Menge M liegt. Die Menge aller inneren Punkte der Menge M bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{M}$.

Def. 5.4: Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung des Punktes x_0 , also in $K_{x_0,r}$, $r > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt. Das bedeutet

$$M \cap K_{x_0,r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punkt Mengen im \mathbb{R}^n

Def. 5.5: Ein Punkt x_r heißt Randpunkt der Menge M , falls in jeder Umgebung $K_{x,r}$ sowohl mindestens ein Punkt der Menge M liegt als auch ein Punkt des \mathbb{R}^n , der nicht in der Menge M liegt. Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit ∂M .

Def. 5.6: Die Menge M heißt abgeschlossen, falls sie alle ihre Randpunkte enthält.

Def. 5.7: Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|x| \leq C, \quad \text{für alle } x \in M$$

gilt.

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen im \mathbb{R}^n

Def. 5.8: Die Menge

$$[x, y] := \{z \mid z = x + s(y - x), s \in [0, 1]\}$$

heißt Verbindungsstrecke der Punkte x und y .

Mit

$$[x_0, \dots, x_p] = \cup_{j=1}^p [x_{j-1}, x_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte x_0, \dots, x_p jeweils durch Verbindungsstrecken verbindet.

Eine Menge M heißt zusammenhängend, falls zwei beliebige Punkte x und y durch einen ganz in M verlaufenden Polygonzug verbunden werden können.

Eine Menge heißt konvex, falls mit x und y aus M die Verbindungsstrecke $[x, y]$ ganz in M liegt.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmenge aus dem \mathbb{R}^n

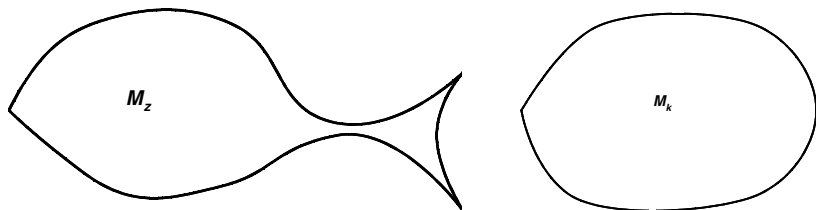


Abbildung 5.4, 5.5: Zusammenhängende Mengen in \mathbb{R}^2 , nicht konvex (links), konvex (rechts)

Buch Kap. 5.1 – Folgen im \mathbb{R}^n

Def. 5.9: Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $a_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im \mathbb{R}^n und bezeichnen ihn durch

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. abkürzend durch (a_k) .

Buch Kap. 5.1 – Grenzwert von Folgen im \mathbb{R}^n

Defintion 5.10: Sei (a_k) , $k \in \mathbb{N}$, eine Folge im \mathbb{R}^n . $a_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert oder Limes von (a_k) falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_k - a_0| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

gilt.

Wir schreiben dafür

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \rightarrow a_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Buch Kap. 5.1 – Grenzwert Koordinatenfolgen

Satz 5.1: Der Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert \mathbf{a}_0 der Folge (\mathbf{a}_k) gilt dann

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{1k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{nk} \end{pmatrix} .$$

Buch Kap. 5.2 – Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher

Defintion 5.11: Unter einer Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in D$ genau ein Element $y \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, wobei wir die Schreibweise $y = f(x)$ verwenden.

D heißt Definitionsbereich der Abbildung f .

$$W = f(D) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{es existiert ein } x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$$

heißt Wertebereich der Abbildung f .

Buch Kap. 5.2 – Graph einer Funktion

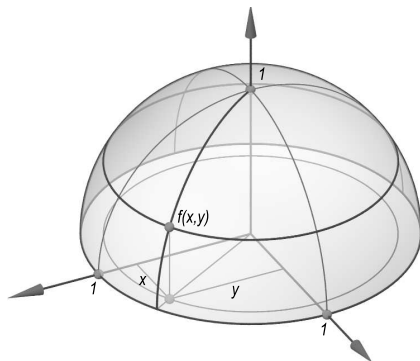


Abbildung 5.8: Graph der Abbildung

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Buch Kap. 5.8 – Niveau einer Funktion

Defintion 5.30: Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, gegeben. Unter einem Niveau a der Funktion f verstehen wir alle Punkte $x \in D$ mit $f(x) = a = \text{const.}$. Diese Punktmenge bezeichnet man auch als Niveaumenge. Ist diese Menge eine Kurve, so nennt man sie Niveau- oder Höhenlinie.

Buch Kap. 5.8 – Niveau und Graph

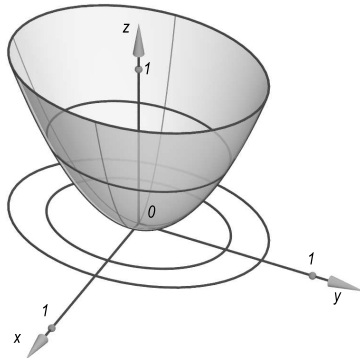


Abbildung 5.19: Graph einer Funktion und Niveaulinien

Buch Kap. 5.4 – Stetigkeit von Abbildungen

Definition 5.20: (Stetigkeit einer Funktion)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

- a) f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls für alle Folgen $(x_k) \subset D$ ($k \in \mathbb{N}$) aus $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

folgt.

- b) f heißt stetig auf $A \subset D$, falls für alle $x \in A$ gilt: f ist stetig in x .
c) f heißt stetig, falls f auf dem gesamten Definitionsbereich D stetig ist.