Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, |x| \leq 1, \;\; -(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2, \;\; 0 \leq z \leq \big(1-x^2-y\big) \right\}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1-x^2) d(x,y)$$

über dem Kreisring

$$D := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2;\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

Hinweis: $\cos^2\phi = \dfrac{1}{2}\left(\cos(2\phi)+1\right).$

Lösung zu Aufgabe 1)

a)

$$\begin{aligned}
V = \int_K 1\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_{-(1-x^2)}^{1-x^2}\int_0^{1-x^2-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} (1-x^2-y)\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)^2 - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&= 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} \\
&= 4\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_D (1-x^2)d(x,y) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (1-r^2\cos^2\varphi) r\, d\varphi\, dr \\
&= 2\pi \int_1^2 r\, dr - \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(2\varphi)}_{\substack{\text{liefert 0 da } \sin(2\varphi) \\ \pi\text{-periodisch}}} +1\Big) d\varphi\, dr \\
&= 3\pi - \pi \int_1^2 r^3\, dr = 3\pi - \pi \cdot \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \le z \le 2, \, 0 \le x^2+y^2 \le \, z^2 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} \, : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \, \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \, = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_R \operatorname{div} \, \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

b) R ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie Parametrisierungen von D und M an und berechnen Sie den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch D, also

$$\int_D \boldsymbol{f} \cdot dO\,.$$

c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluß durch den gewölbten Teil des Randes von R, also

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO\,?$$

Lösungsskizze:

a) $\operatorname{div} \, \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z) \, = \, 2xy - 2xy + 2z \, = \, 2z\,.$

Parametrisierung von R:

$0 \le z \le 2, \, x = \, r\cos(\phi), \, y = \, r\sin(\phi), \, 0 \le \phi \le 2\pi, \, 0 \le r \le z.$ **[1 Punkt]**

$$\int_R \text{div } \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z 2z \cdot r\, dr d\phi\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 z \left[r^2\right]_0^z dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Parametrisierung von M:

$p(z,\phi) = (\, z\cos(\phi),\, z\sin(\phi),\, z)^T,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2\,.$ [**1 Punkt**]

Parametrisierung von D:

$p(r,\phi) = (\, r\cos(\phi),\, r\sin(\phi),\, 2)^T,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2\,.$ [**1 Punkt**]

$$\frac{dp}{dr} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \frac{dp}{dr} \times \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ r\end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

$$< \begin{pmatrix}0\\ 0\\ r\end{pmatrix}, \boldsymbol{f} >= r \cdot f_3 = r(r^2+4)\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_D \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 + 4r\, d\phi\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + 2r^2\right]_0^2 = 24\pi. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b) [**1 Punkt**]

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_R \text{div } \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z) - \int_D \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, dO = 8\pi - 24\pi = -16\pi\,.$$

Bearbeitungstermine: 30.01.-03.02.2017