**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

# Analysis III
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 4, Präsenzaufgaben

**Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D := [-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,] \times [-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\,] \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) \;=\; 8\cos(x+y) \;+\; \sin(x-y) \;+\; 12xy \;+ 11x^2 \;+ 8y^2\,.$$

a) Besitzt $f$ auf $D$ ein Minimum und ein Maximum?

b) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion $f$ auf $D$ indem Sie ein Minimum des Taylorpolynoms zweiten Grades $T_2$ von $f$ mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0)^T = (0,0)^T$ berechnen.
**Hinweis:** Sie brauchen für diese Aufgabe keine einzige Ableitung von $f$ zu berechnen. Benutzen Sie die Taylor-Reihen von Cosinus und Sinus.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), dass der minimale Wert von $f$ auf dem dort angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als 7.5 sein kann.

d) $T_2$ ist stetig auf $D$. Müsste man nicht auch ein Maximum von $T_2$ finden?

e) Bestimmen Sie die globalen Extrema von $T_2$ auf $D$.

**Lösungshinweise zu 1:**

a) Da $D$ abgeschlossen und beschränkt ist, und $f$ stetig ist, besitzt $f$ auf $D$ ein globales Minimum und ein globales Maximum.

b) Die polynomialen Anteile von $f$ werden exakt wieder gegeben. Wegen
$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4), \qquad \sin(z) = z + O(z^3)\,,$
erhält man ohne lange Rechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) \;&=\; 8 - 4(x+y)^2 \;+\; (x-y) \;+\; 12xy \;+ 11x^2 \;+\; 8y^2 \\ &= 8 + x - y + 7x^2 + 4xy + 4y^2\,, \end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} T_2(x,y) \;=\; (14x + 4y + 1,\, 8y + 4x - 1)^T = 0 \implies x = -\frac{1}{8},\, y = \frac{3}{16}\,,$$

$$H\,T_2(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad 14 > 0 \,\wedge\, 14 \cdot 8 - 4 \cdot 4 > 0 \qquad \Longrightarrow \lambda_1 > 0,\, \lambda_2 > 0.$$

Im Punkt $P_0 = (-\frac{1}{8},\, \frac{3}{16}\,)^T$ liegt ein Minimum des Taylorpolynoms vor.

c) Die dritten Ableitungen haben alle die Form $8\sin(x+y) \pm \cos(x-y)$. Alle dritten Ableitungen sind also vom Betrag kleiner oder gleich 9. Es gilt daher

$$|R_2(x,y)| \le \frac{(2^3)\cdot 9}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16}\,.$$

Somit gilt

$$f(x_{min},y_{min}) \ge T_2(x_{min},y_{min}) - \frac{3}{16} \ge T_2(-\frac{1}{8},\frac{3}{16}) - \frac{3}{16} = 8 - \frac{5}{32} - \frac{3}{16} = 8 - \frac{11}{32}$$

d) Da $T_2$ stetig auf dem Kompaktum $D$ ist, und es im Inneren von $D$ kein Maximum gibt, muss das Maximum auf dem Rand liegen.

e) Wir bestimmen Kandidaten für Extrema auf dem Rand von $D$. Im Inneren gibt es nur das (lokale?) Minimum in $P_0$.

Man erhält zum Beispiel für $x = \frac{1}{4}$

$$g_1(y) := T_2(\frac{1}{4},y) = 8 + \frac{1}{4} - y + \frac{7}{16} + y + 4y^2$$

Mit offensichtlichen Maxima in $P_{1,2} := (\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4})$ und Minimum in $P_3 := (\frac{1}{4},0)$.

für $x = -\frac{1}{4}$

$$g_2(y) := T_2(-\frac{1}{4},y) = 8 - \frac{1}{4} - y + \frac{7}{16} - y + 4y^2$$

Wegen $g_2'(y) = 8y - 2$ gibt es keine lokalen Extrema im Inneren des Intervalls $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$.

Mögliche Extremwerte liegen in den Eckpunkten $P_{4,5} = (-\frac{1}{4},\mp\frac{1}{4})$

Für $y = -\frac{1}{4}$

$$g_3(x) := T_2(x,-\frac{1}{4}) = 8 + x + \frac{1}{4} + 7x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Mit offensichtlichen Maxima in $P_{2,4} = (\pm\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ und Minimum in $P_6 := (0,-\frac{1}{4})$.

Für $y = \frac{1}{4}$

$$g_4(x) := T_2(x,\frac{1}{4}) = 8 + 2x + 7x^2.$$

Wegen $g_4'(x) = 2 + 14x$ und , $g_4''(x) = 14$ kann es keine lokalen Maxima im Inneren des Intervalls geben. In $P_7 := (-\frac{2}{7},\frac{1}{4})$ liegt ein lokales Minimum von $g_4$ vor.

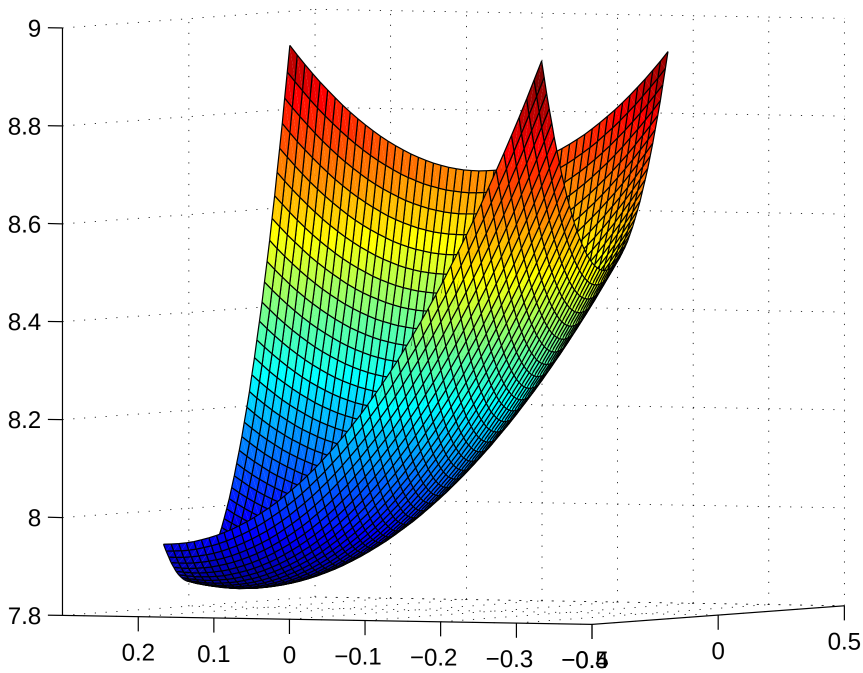
Funktionswertevergleich liefert:

$T_2(\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4}) = T_2(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}) = 8 + \frac{15}{16}$ und $T_2(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 8 - \frac{1}{16}$

Maximaler Funktionswert ist also $8 + \frac{15}{16}$. In $P_{1,2} = (\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4})^T$ und $P_4 = (-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})^T$ liegen globale Maxima vor.

Oben hatten wir $T_2(x_{min},y_{min}) = 8 - \frac{5}{32} < 8 - \frac{1}{16}$. Außerdem rechnet man $T_2(P_3) = 8 + \frac{1}{4} + \frac{7}{16}$ und $T_2(P_6) = 8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, sowie $T_2(P_7) = 8$.

Das globale Minimum liegt in $(x_{min},y_{min}) = (-\frac{1}{8},\frac{3}{16})$.


9
8.8
8.6
8.4
8.2
8
7.8
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.5
0
0.5

**Aufgabe 2)** (Klausur Prof. Hinze 2009)

Durch

$$F(x, y) \;=\; y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x + y) + 2 \;=\; 0$$

ist in der Umgebung von $P_0. = (-1, 1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$F(x, y) \;=\; 0 \implies y = g(x), \quad g(-1) = 1\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $g(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ .

**Zusatz zur Klausuraufgabe**: Berechnen Sie $g'(-1)$ mittels impliziter Differentiation.

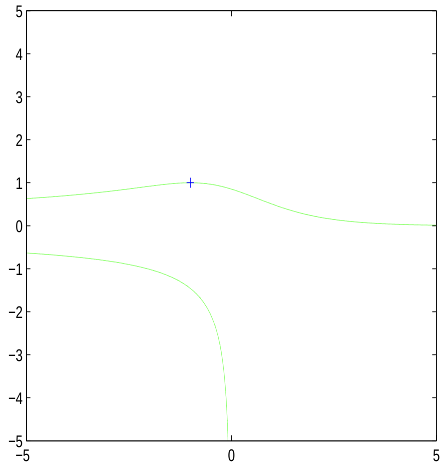
**Lösung zu Aufgabe 2)**

$F(x, y) \;=\; y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x + y) + 2 \;=\; 0$ Nach denm Satz über implizite Funktionen gilt

$$g'(x) = -F_x/F_y = -\frac{y^2 - y\exp(x+y)}{2xy - \exp(x+y) - y\exp(x+y)} \implies$$

$$g'(-1) = \frac{1 - 1\exp(0)}{-2 - 1 - 1\exp(0)} = 0$$

$$T_1(x; -1) \;=\; g(-1) + \; g'(-1)(x+1) \;=\; 1\,.$$




Implizites Differenzieren

$$\frac{d}{dx}\,F(x, y) \;=\; 2yy' \cdot x + y^2 - y' \cdot \exp(x+y) - y \cdot \exp(x+y) \cdot (1 + y') \;=\; 0 \implies$$

$$0 \;=\; -2y'(-1) + 1 - y'(-1) \cdot \exp(0) - \exp(0) \cdot (1 + y'(-1)) \;=\; -4y'(-1)\,.$$

Also $g'(-1) \;=\; y'(-1) \;=\; 0\,.$

**Bearbeitungstermine:** 05.12.-09.12.2016