Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: [2+6+2 Punkte]

Gegeben sei $\quad F(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0\,.$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $F(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (1,1)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(1)=1$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt
$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)\,.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der impliziten Differentiation das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion g aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Verwenden Sie zur Berechnung von $y''(1)$ bei Bedarf einen Taschenrechner.

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) $F(1,1) = 0$. Es gilt
$$F_y(x,y) = 4x^2 + 24x^4y^2 \quad\Longrightarrow\quad F_y(1,1) = 4 + 24 \neq 0\,.$$

b)
$$\begin{aligned}
F(x,y(x)) &= 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dF}{dx} = F'(x,y(x)) = 0\\
F'(x,y(x)) &= 8xy + 4x^2y' + 32x^3y^3 + 24x^4y^2y' = 0\\
&\Longrightarrow\quad y'(x) = -\frac{8xy + 32x^3y^3}{4x^2 + 24x^4y^2} = -\frac{8y + 32x^2y^3}{4x + 24x^3y^2} \quad (*)\\
F''(x,y(x)) &= 8y + 8xy' + 8xy' + 4x^2y'' + 96x^2y^3 + 192x^3y^2y'\\
&\quad + 48x^4y(y')^2 + 24x^4y^2y'' = 0 \qquad (**)
\end{aligned}$$

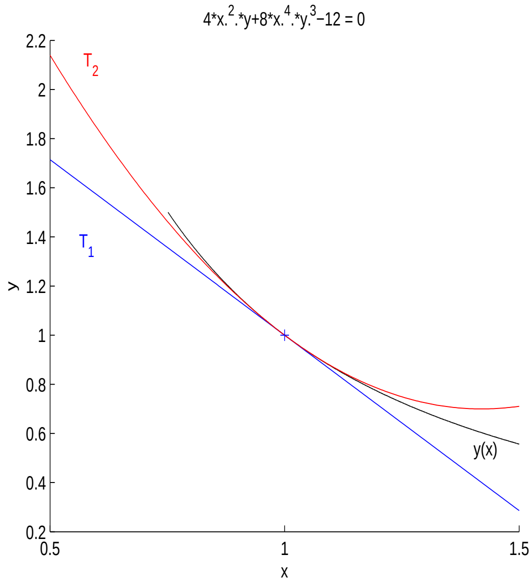
Durch Einsetzen von $x = y = 1$ in (*) erhält man $y'(1) = -\dfrac{8+32}{4+24} = -\dfrac{10}{7}$.

Durch Einsetzen von $x = y = 1$ und $y' = -\frac{10}{7}$ in (**) erhält man

$$8 - 16\,\frac{10}{7} + 4y''(1) + 96 - 192\,\frac{10}{7} + 48\frac{100}{49} + 24y''(1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad y''(1) = 3.3994\cdots$$

Als Taylorpolynom ergibt sich also

$$T_2(x;1) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2 = 1 - \frac{10}{7}(x-1) + \frac{3.3994\cdots}{2}(x-1)^2\,.$$


4*x.^2.*y+8*x.^4.*y.^3−12 = 0
T2
T1
y(x)
y
x
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1
1.5

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-5}{4} + y\cos(x-1) + xyz \\ xy\sin(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der Umgebung des Punktes $P := (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$ bestimmt wird. Genauer: Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g : x \mapsto (y,z)$ gibt, so dass in einer Umgebung von $P = (1,1,0)^T$

$$F(x,y,z) = 0 \iff (y,z) = g(x), \quad g(1) = (1,0)^T$$

gilt.

b) Läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Kurve nach jeder der Komponenten x, y oder z parametrisieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve aus Teil a) im Punkt P. In welchen Punkten schneidet die Tangente die Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$?

Lösungsskizze Aufgabe 2: [3+2+4+1 Punkt]

a) $F(1,1,0) = (0,0)^T$.

$$JF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2} - y\sin(x-1) + yz & \cos(x-1) + xz & xy \\ y\sin(z) & x\sin(z) & xy\cos(z) \end{pmatrix}$$

$$JF(1,1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen Rang $JF_{y,z}(1,1,0) =$ Rang $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, kann man nach y, z auflösen. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es lokal eine C^1 Funktion

$$g : x \mapsto (y,z), \quad F(x, g(x)) = 0\,, \quad g(1) = (1,0)^T$$

Die Lösungsmenge ist also eine glatte, nach x parametrisierbare Kurve.

b) Wie in a) zeigt man, dass lokal auch eine Funktion $h(y) = (x(y), z(y))$ mit $F(x(y), y, z(y)) = 0$ und $h(1) = (1,0)^T$ existiert.

Eine Auflösbarkeit nach x, y ist dagegen (zumindest) mit Hilfe des Satzs über implizite Funktionen nicht begründbar, denn

$$JF_{x,y}(1,1,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist singulär.

c) Die Kurve und ihre Tangente sind gegeben durch

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}, \qquad t(x;1) = c(1) + (x-1)\begin{pmatrix} 1 \\ y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -(JF_{y,z}(x,y,z))^{-1} \cdot JF_x(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Tangente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Schnittpunkt mit $x = 0 \,:\, \lambda = -1, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

Schnittpunkt mit $y = 0 \,:\, \lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Abgabetermine: 05.12.-09.12.2016 oder 19.12.-23.12.16