Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}^0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\boldsymbol{w}^{[j]}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $j = 1, 2, 3$,
$\boldsymbol{v}^{[1]} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[2]} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[3]} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.
und $\boldsymbol{w}^{[j]} := \frac{\boldsymbol{v}^{[j]}}{\|\boldsymbol{v}^{[j]}\|}$. Können Sie für $j = 1, 2, 3$ entscheiden, ob es sich bei $\boldsymbol{w}^{[j]}$ um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}(0, -4, 1)^{\mathrm{T}}$. Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?
Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?
Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Auf der gesuchten Niveaufläche gilt

$$-x^2 - y^2 + 2x + z = -1^2 - 2^2 + 2 + 3 = 0\,.$$

$$\nabla f(x, y, z) = (-2x + 2, -2y, 1)^T$$
$$\nabla f(1, 2, 3) = (0, -4, 1)^T$$

b) $D_{\boldsymbol{w}^{[1]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{v}^{[1]} = 0 - 4 + 1 < 0$: Abstiegsrichtung.

$D_{\boldsymbol{w}^{[2]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{v}^{[2]} = 0 - 4 + 0 < 0$: Abstiegsrichtung.

$D_{\boldsymbol{w}^{[3]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \boldsymbol{v}^{[3]} = 0 + 0 + 0 = 0$: Es kann eine Abstiegs- oder eine Aufstiegsrichtung vorliegen oder eine Richtung, in der die Funktion konstant bleibt.

Wir schauen etwas genauer hin:

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \Delta x \cdot \boldsymbol{v}^{[3]}) - f(\boldsymbol{x}^0) = -(1 + \Delta x)^2 - 2^2 + 2(1 + \Delta x) + +3 = -\Delta x^2 < 0$$

Es geht also ebenfalls abwärts.

c)

$$D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0) = \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \frac{1}{\sqrt{17}} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sqrt{17}$$

$\tilde{\boldsymbol{v}}$ ist in $\boldsymbol{x}^0$ eine Aufstiegsrichtung (sie ist sogar die Richtung des steilsten Anstiegs).

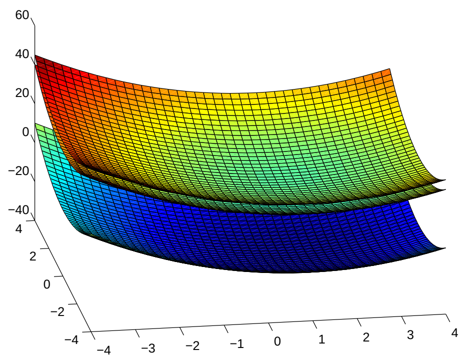
$f(\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}) = f(1,-6,5) = -1 - 36 + 2 + 5 = -30\,.$

Offensichtlich ist dieser Funktionswert kleiner als $f(\boldsymbol{x}^0) = 0\,.$

$f(\boldsymbol{x}^0 + 0.5\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}) = f(1,0,3.5) = 4.5 > f(\boldsymbol{x}^0) = 0\,.$

Des Rätsels Lösung: Aussagen über Anstieg, Abstieg etc. sind i.d.R. nur lokale Aussagen.

Das Bild zeigt die Niveauflächen der drei Punkte $\boldsymbol{x}^0 + 0.5 \cdot \sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.



Aufgabe 2: (6+4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z)\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$.

b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x,y,z) = f(x,y,z) - T_2(x,y,z)$ folgende Abschätzng gilt:

$$|R_2(x,y,z)| \le 0.02 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \le 0.1\,.$$

Lösungshinweise zu 2:

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z), & f(0,1,\pi) &= 2 + 1 + \cos(\pi) = 2\,.\\
f_x &= z + e^x y^2 \cos(z), & f_x(0,1,\pi) &= \pi - 1\\
f_y &= 2y + 2ye^x \cos(z), & f_y(0,1,\pi) &= 2 - 2 = 0\\
f_z &= x - e^x y^2 \sin(z), & f_z(0,1,\pi) &= 0 - 0 = 0\\
f_{xx} &= e^x y^2 \cos(z), & f_{xx}(0,1,\pi) &= -1\\
f_{xy} &= 2e^x y \cos(z), & f_{xy}(0,1,\pi) &= -2\\
f_{xz} &= 1 - e^x y^2 \sin(z), & f_{xz}(0,1,\pi) &= 1\\
f_{yy} &= 2 + 2e^x \cos(z), & f_{yy}(0,1,\pi) &= 2 - 2 = 0\\
f_{yz} &= -2ye^x \sin(z), & f_{yz}(0,1,\pi) &= 0\\
f_{zz} &= -e^x y^2 \cos(z), & f_{zz}(0,1,\pi) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= f(0,1,\pi) + f_x(0,1,\pi)(x-x_0) + f_y(0,1,\pi)(y-y_0) + f_z(0,1,\pi)(z-z_0)\\
&\quad + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) Hf(0,1,\pi) \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\\
&= 2 + x(\pi-1) + \frac{1}{2}(x, y-1, z-\pi)\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y-1\\ z-\pi\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}(x, y-1, z-\pi)\begin{pmatrix} -x - 2(y-1) + (z-\pi)\\ -2x\\ x + (z-\pi)\end{pmatrix}\\
&= 2 + \pi x - x + \frac{1}{2}\left[-x^2 - 2x(y-1) + x(z-\pi) - 2x(y-1) + x(z-\pi) + (z-\pi)^2\right]\\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}
\end{aligned}$$

Alternativ rechnet man

$$\begin{aligned}
T_2(x,y,z) \;&=\; f(0,1,\pi) \;+\; \mathrm{grad} f(0,1,\pi)^T \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-\pi \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2!}\,\big(f_{xx}(0,1,\pi)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,1,\pi)(x-0)(y-1) \\
&+ 2f_{xz}(0,1,\pi)(x-0)(z-\pi) + f_{yy}(0,1,\pi)(y-1)^2 \\
&+ 2f_{yz}(0,1,\pi)(y-1)(z-\pi) + f_{zz}(0,1,\pi)(z-\pi)^2\big) \\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y-1) + x(z-\pi) + \frac{(z-\pi)^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Oder über Potenzreihen mit

$$\cos(z) = -1 + \frac{1}{2}(z-\pi)^2 + \cdots\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\,, \qquad y^2 = (y-1)^2 + 2(y-1) + 1\,.$$

b)

$$\begin{array}{ll}
f_{xxx} = e^x y^2 \cos(z), & |f_{xxx}| \le 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxy} = 2ye^x \cos(z), & |f_{xxy}| \le 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxz} = -e^x y^2 \sin(z), & |f_{xxz}| \le 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xyy} = 2e^x \cos(z), & |f_{xyy}| \le 2e^{0.1} \\
f_{xyz} = -2e^x y \sin(z), & |f_{xyz}| \le 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xzz} = -e^x y^2 \cos(z), & |f_{xzz}| \le 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{yyy} = 0, & \\
f_{yyz} = -2e^x \sin(z), & |f_{yyz}| \le 2e^{0.1} \\
f_{zzy} = -2e^x y \cos(z), & |f_{yzz}| \le 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{zzz} = e^x y^2 \sin(z), & |f_{zzz}| \le 1.1^2 \cdot e^{0.1}
\end{array}$$

Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist zum Beispiel

$C := 4.4 = 2.2 \cdot 4^{0.5} \;>\; 2.2 \cdot e^{0.5} \;>\; 2.2 \cdot e^{0.1}\,.$

Als Schranke für den Fehler erhält man

$$|R_2(x,y,z)| \;\le\; \frac{3^3}{3!} \cdot C \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \;\le\; \frac{27}{6} \cdot 4.4 \cdot 0.1^3 \;=\; \frac{9 \cdot 2.2}{1000} \;<\; 0.02\,.$$

Abgabetermine: 21.11.- 25.11.2016 bzw. 28.11. - 2.12.2016.