Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Gradientenfelder analytisch. Skizzieren Sie die Höhenlinien (vgl. Präsenzblatt 1) und die Gradientenfelder mit Hilfe entsprechender Programme oder heften Sie per Hand an einigen Punkten der Höhenlinien aus Präsenzblatt 1 die Richtung der Gradienten in diesen Punkten an. Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

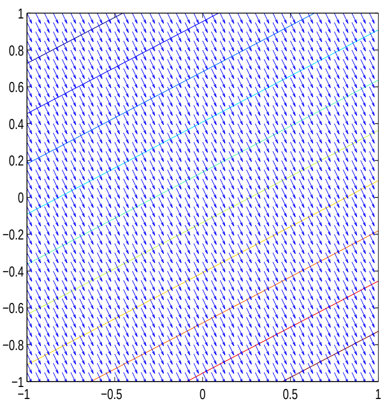
Benutzen Sie (mindestens) für f_4 entsprechende Programme z.B. die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf, contour, gradient* und *quiver*) und *contour* bzw. deren ez-Versionen.

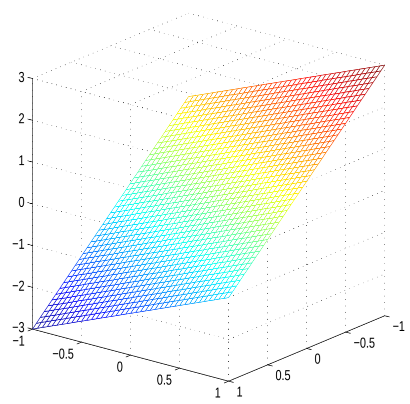
a) $f_1(x,y) = x - 2y$, b) $f_2(x,y) = x\,y$,

c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$, d) $f_4(x,y) = \cos(2\pi y)\sin(\pi x)$.

Lösung zur Aufgabe 1:

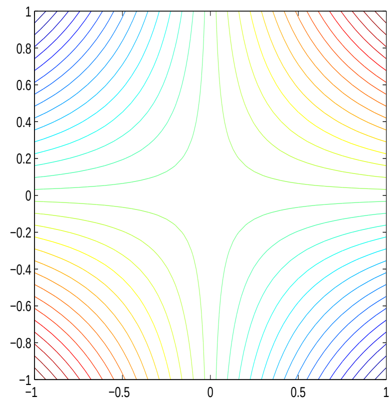
a) Höhenlinien : Geraden $y = \frac{x-C}{2}$.
grad $f_1(x,y) = (1,-2)^T$.

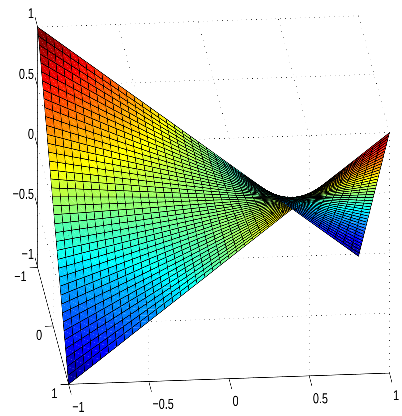




b) Die Höhenlinien zu f_2 sind Hyperbeläste, die sich aus $y = C/x$ für $x \neq 0$ bzw. $x = C/y$ für $y \neq 0$ ergeben.

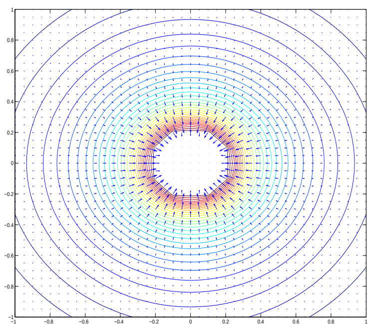
grad $f_2(x,y) = (y,x)^T$.

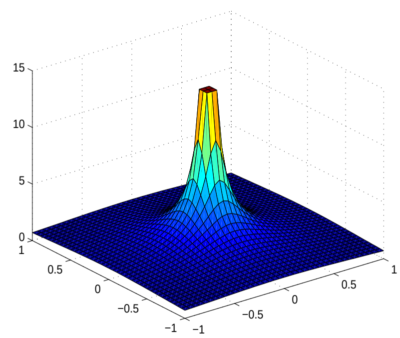




c) Die Höhenlinien zu f_3 sind Kreise um den Nullpunkt. Die Funktion ist in $(0,0)$ nicht definiert. Sie strebt dort gegen ∞.

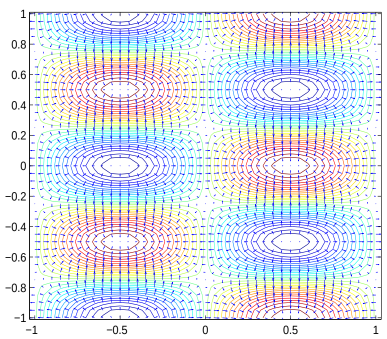
grad $f_3(x,y) = -\dfrac{1}{\|(x,y)^T\|^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

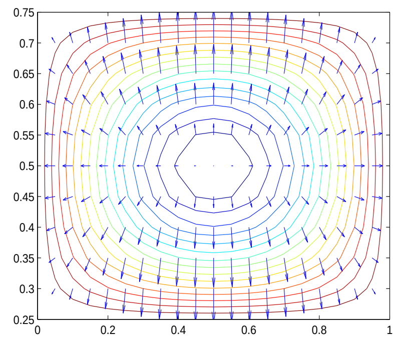


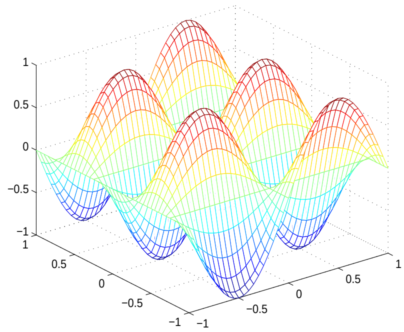


d) Die Höhenlinien zu f_4 lassen sich schlecht erraten. Abhilfe leistet z.B. Matlab. Es gilt

grad $f_4(x,y) = \pi \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi y)\,\cos(\pi x) \\ -2\,\sin(2\pi y)\,\sin(\pi x) \end{pmatrix}$.







Das letzte Bild wurde wie folgt erzeugt:

```
 x=[-1 : 0.05 : 1];
 y=[-1 : 0.05 : 1];
 [X,Y] = meshgrid(x,y);  %Netz/Gitter erzeugen

 r=X.^2 + Y.^2;
%*******************Funktion 1*************************
% z= X-2.*Y;

%*******************Funktion 2*************************
 % z= X.*Y;

%************************Funktion 3********************

% r(r<0.005)=0.005;            %setzt alle Einträge<0.005 auf 0.005
% z=1./sqrt(r);

%********************Funktion 4****************************

  z=cos(2* pi .*Y).*sin(pi.*X);

 mesh(X,Y,z)                    % Fläche wird als Netz gezeichnet
% surf(X,Y,z)                   % Fläche wird gezeichnet
% contour(X,Y,z,15)             %15 Höhenlinien werden gezeichnet
% cs=contour(z,60);
% clabel(cs,'manual');          % Höhenlinien können manuell mit
                                % Funktionswerten versehen werden
% grid on
 [fx,fy] = gradient(z);    %Gradientenfeld wird berechnet
hold on
% quiver(X,Y,fx,fy)        %Gradientenfeld wird gezeichnet
hold off
```

Die Gradienten scheinen orthogonal zu den Höhenlinien zu sein.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 = f_2 \circ f_1$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 , \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \cos\theta \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ c \cdot r \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5(t) = (\Phi \circ g)(t) = \Phi(t, y(t)) \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & C^2 - \text{Funktion} \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g, \Phi \quad C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(x_1, x_2) . \end{cases}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

- $$J f_1 = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \det\, J f_1 = 2(x^2 - y^2).$$

  Die Determinante verschwindet für $y = \pm x$.

- $$f_2(u, v) = \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix}$$
  $$J f_2(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det\, J f_2 = 2.$$

  Die Determinante verschwindet nie.

- $$Jf_3 \;=\; Jf_2 \cdot Jf_1 \;=\; \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
  $$\det\, Jf_3 = \det\, Jf_2 \cdot \det\, Jf_1 = 0 \Longrightarrow det Jf_2 = 0 \vee \cdot \det\, Jf_1 = 0 \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

- $$Jf_4 \;=\; \begin{pmatrix} a\cos\phi\cos\theta & -ar\sin\phi\cos\theta & -ar\,\cos\,\phi\sin\theta \\ b\sin\phi\cos\theta & br\cos\phi\cos\theta & -br\,\sin\,\phi\sin\theta \\ c\sin\theta & 0 & cr\cos\theta \end{pmatrix}$$
  $$\begin{aligned}\det\, Jf_4 =\; & a\cdot b\cdot c\left(\sin\theta\begin{vmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -r\,\cos\,\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & -r\,\sin\,\phi\sin\theta \end{vmatrix} \;+\; r\cos\theta\begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix}\right) \\ & = a\cdot b\cdot c\cdot\sin\theta\;\big(r^2\,\sin\theta\,\cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\big) \\ & +\; a\cdot b\cdot c\cdot r\cos\theta\;\big(r\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\big) \\ & =\; a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \;=\; a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,,\end{aligned}$$
  Die Determinante verschwindet nur für $r=0$ also im Ursprung oder $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

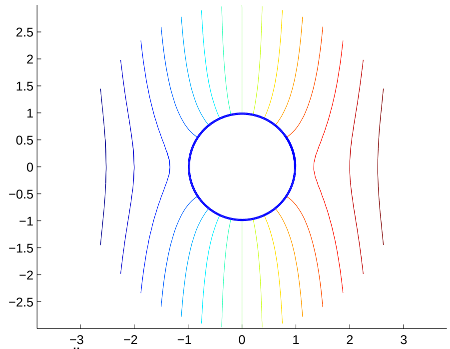
- $$Jg(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \qquad J\Phi\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \Phi_t & \Phi_y \end{pmatrix}$$
  $$Jf_5 \;=\; J(\Phi\circ g) = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Phi_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = \Phi_t + \Phi_y\cdot\dot y$$
  Die Determinante (in diesem Fall die Ableitung selbst) verschwindet für
  $$\dot y(t) \;=\; \frac{dy}{dt} = -\,\frac{\Phi_t}{\Phi_y} = -\,\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}$$

Aufgabe 3:

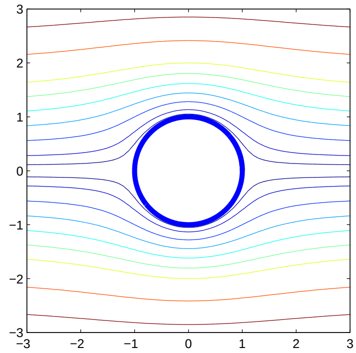
In einem unendlich ausgedehnten elektrischen Leiter existiere die Bohrung $(x, y, z)^T \;:\; x^2 + y^2 \leq R^2$. Eine Spannungsquelle bewirke außerhalb der Bohrung das elektrische Potential

$$\Phi(x, y, z) := -E_0 \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} R^2 \right) .$$

Für die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ gilt dann innerhalb der Bohrung $\boldsymbol{J} = 0$ und außerhalb der Bohrung
$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}$, $\quad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$,
κ = spezifische Leitfähigkeit des Leiters.
Berechnen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{J}$ und die Quelldichte
div $\boldsymbol{J} := (J_1)_x + (J_2)_y + (J_3)_z$.



Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung



Umströmung einer Kreisbohrung

Lösung zur Aufgabe 3:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -E_0 \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right) = -E_0 \left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -E_0 \left(\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \right)$$

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$ Potential und Stromdichte sind unabhängig von z.

Für die Stromdichte gilt also

$$J = \kappa E_0 \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \\ \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} R^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (J_1)_x &= \kappa E_0 R^2 \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \kappa E_0 R^2 \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 4x^3 - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \kappa E_0 R^2 \, 2x \frac{x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J_2)_y &= -\,\kappa\, E_0\, R^2\, 2x\, \frac{(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y^2}{(x^2+y^2)^4} \\ &= -\,\kappa\, E_0\, R^2\, 2x\, \frac{x^2+y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^3} = -\kappa\, E_0\, R^2\, 2x\, \frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3} \;=\; -(J_1)_x\,.\end{aligned}$$

Mit $(J_3)_z = 0$ folgt, dass die Divergenz verschwindet. Das Feld ist quellenfrei.

Das erste Bild ist wie folgt entstanden

```
hold on
axis equal
[r,phi] = meshgrid(1:0.05:3,-pi-0.2:0.1:pi+0.2);
x=r.*cos(phi);
y=r.*sin(phi);
z= x + (x./(x.^2+y.^2));

contour(x,y,z,15)

t=[0:0.01:6.9];
plot(cos(t),sin(t),'b','LineWidth',4)
xlabel('Äquipotentiallinien um eine Kreisbohrung','FontSize',15)
%
```

Abgabetermine: 07.11.-11.11.2016 oder 21.11.-25.11.2016.