

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid |x| \leq 1, \quad -(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2, \quad 0 \leq z \leq (1-x^2-y) \right\}.$$

- b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1-x^2) d(x, y)$$

über dem Kreisring

$$D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Hinweis: $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (\cos(2\phi) + 1).$

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie $\int_R \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z).$
- b) R ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M . Geben Sie Parametrisierungen von D und M an und berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} durch D , also

$$\int_D \mathbf{f} \cdot dO.$$

- c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von R , also

$$\int_M \mathbf{f} \cdot dO?$$