

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25: (Klausur SoSe 2004, erweitert)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\sin y + 3x^2z^2, x \cos y + \frac{1}{1+y^2}, 1 + 2x^3z \right)^T.$$

- a) Man weise die Existenz eines Potentials zu \mathbf{f} nach, ohne es zu berechnen.
- b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von \mathbf{f} und
- c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- d) Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c} : [0, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \sin t)^T$. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

- e) Man zeichne die Kurve \mathbf{c} unter Verwendung der MATLAB-Routine 'plot3'.

Aufgabe 26:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet G , das von der Funktion $y = 1 - (x - 1)^2$ und der x -Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Sattelfläche

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = xy\} .$$

- a) Man gebe eine Parametrisierung von S an,
- b) zeichne S mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und
- c) berechne den Flächeninhalt von S mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Aufgabe 28: (Klausur WiSe 2009/10)

Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, z^3)^T$ und der Körper

$$H = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, 0 \leq y\} .$$

- a) Man skizziere H .
- b) Für die H berandenden Flächenstücke gebe man jeweils Parametrisierungen an.
- c) Man berechne jeweils den Fluss von \mathbf{f} durch diese Randflächenstücke.
- d) Man berechne das Volumenintegral $\int_H \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$.

Abgabetermin: 25.1. - 29.1.2016 (zu Beginn der Übung)