Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Klausur 2012/13, Oberle, Kiani)

Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \;=\; 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) \;+\; x \;+\; 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x\,y \;-1 \;=0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F \;=\; f +\; \lambda\,g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\nabla^2 F(x_0,y_0;\lambda)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $T_g(x_0,y_0)$.

Lösungsskizze:

a) Es gilt $g(1,1) =\; 1-1 = 0$. Der Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ ist also zulässig. [**1 Punkt**]

$\nabla g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; \nabla g(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Regularitätsbedingung ist also erfüllt. [**1 Punkt**]

Für f rechnet man

$$\nabla f(x,y) = = \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} \;+\; 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x}{y}} \;+\; 5 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{1}{x} \;+\; 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{-1}{y} \;+\; 5 \end{pmatrix}. \qquad \text{[\textbf{1 Punkte}]}$$

Somit erhält man für einen zulässigen stationären Punkt der Lagrange-Funktion das Gleichungssystem:

$$F_x = \frac{2}{x} + 1 + \lambda y = 0\,,$$

$$F_y = \frac{-2}{y} + 5 + \lambda x = 0\,,$$

$$g = xy - 1 = 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für $x = y = 1$ also

$$F_x : \frac{2}{1} + 1 + \lambda = 0 \iff \lambda = -3\,,$$

$$F_y = \frac{-2}{1} + 5 + \lambda = 0 \iff \lambda = -3\,.$$

$$g = 1 - 1 = 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$(1,1)^T$ ist also ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion mit zugehörigem Multiplikator $\lambda = -3$.

b) Es gilt :

$$HF(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^2} & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{y^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

d.h. $HF(1,1;-3)$ ist indefinit ($\det HF(1,1;-3) = -13$). **[1 Punkt]**

Tangentialraum:

$\boldsymbol{v} = \binom{x}{y}$ mit $\nabla g(1,1)^T \cdot \binom{x}{y} = 0 \Rightarrow x + y = 0\,.$ **[1 Punkt]**

Auf dem Tangentialraum:

$$(1,-1)\nabla^2 F(1,1;-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

[1 Punkt]

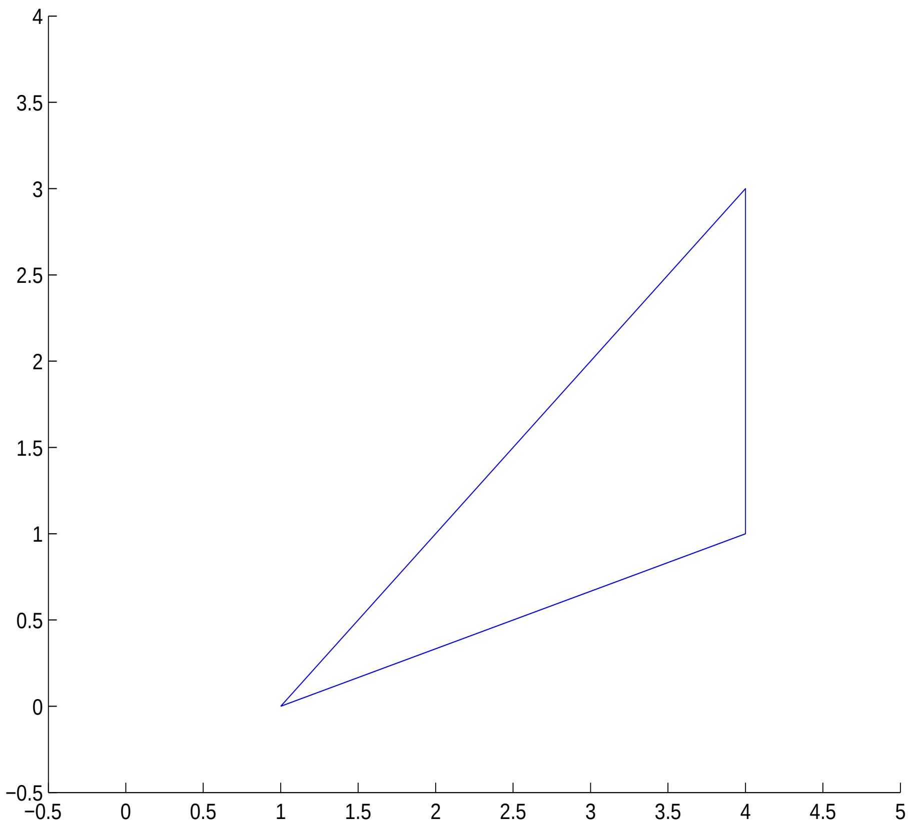
d.h. die Hesse-Matrix $HF(1,1;-3)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,1)$ ein strenges lokales Minimum vor.
[1 Punkt]

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie die Integrationsbereiche.

a)
$$\int\int_{D_1} x \cdot y \, d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [0,2] \times [1,4]\,.$$

b)
$$\int\int_{D_2} 1 \, d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x| \leq 1, \, |y| \leq |1 - \sqrt{|x|}\,| \right\}$$

c)
$$\int\int_{D_3} (x+3y+2) \, d(x,y) \quad \text{wobei } D_1 \text{ das Dreieck mit den Ecken (1,0), (4,1), (4,3) ist.}$$



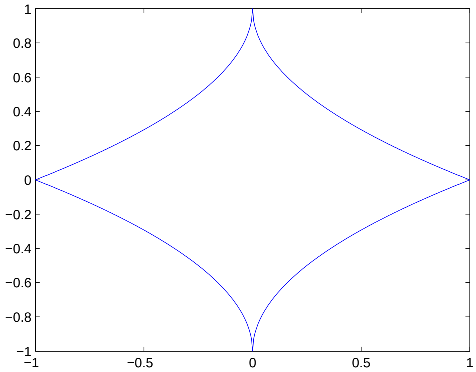
Lösungsskizze zu 2:

a) $f(x,y) = x \cdot y$ soll über das Rechteck $[0,2] \times [1,4]$ integriert werden.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\, d\boldsymbol{x} &= \int_1^4 \int_0^2 x \cdot y \, dx\, dy \\
&= \int_1^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_1^4 y \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] dy \\
&= \int_1^4 2y \, dy = 4^2 - 1^2 = 15.
\end{aligned}$$

b)
$$\int\int_{D_2} 1\, d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\, |y| \le \left|1 - \sqrt{|x|}\,\right| \right\}$$

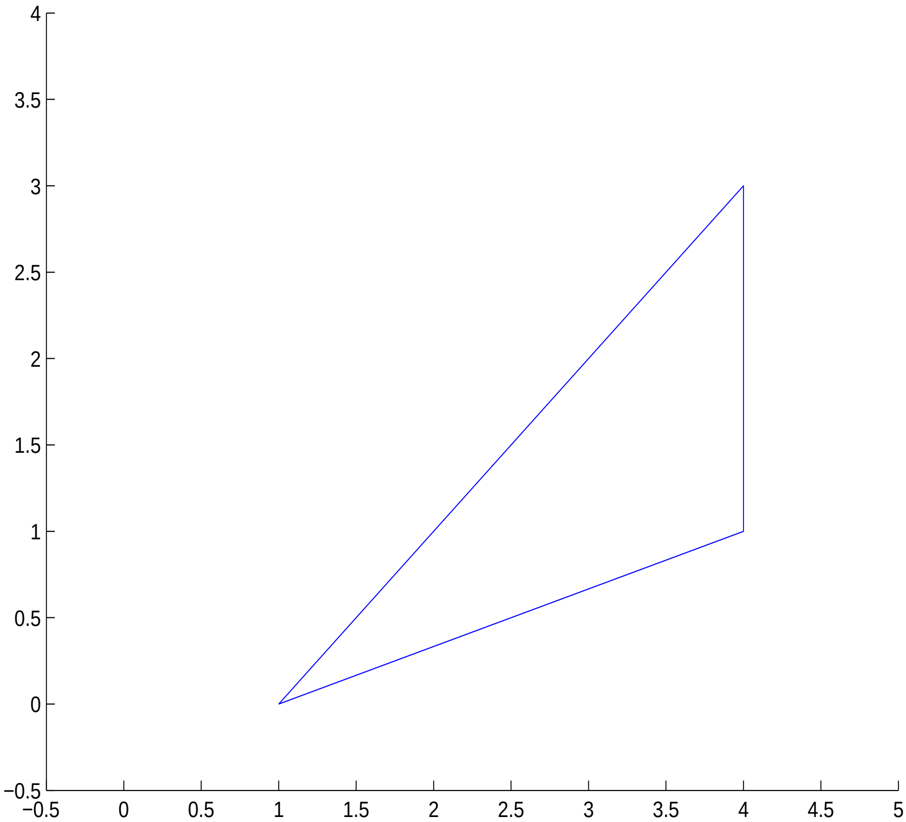
Es handelt sich um ein Normalbereich
$$-1 \le x \le 1\,,\ \sqrt{|x|} - 1 \le y \le 1 - \sqrt{|x|}$$



Die Funktion ist stetig. Das Integral existiert also.
$$\int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{|x|}-1}^{1-\sqrt{|x|}} 1\, dy\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} 2 - 2\sqrt{|x|}\, dx \;=\; 2\int_0^1 2 - 2\sqrt{x}\, dx \;=\; \frac{4}{3}\,.$$

c) $\displaystyle\int_D (x + 3y + 2)\, d\boldsymbol{x}$

wobei D das Dreieck mit den Ecken (1,0), (4,1), (4,3) ist.



$$D: \; x \in [1,4], \; \frac{x-1}{3} \;\leq\; y \;\leq\; x-1$$

$$\int_D (x+3y+2)\, d\boldsymbol{x} \;=\; \int_1^4 \int_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} (x+3y+2)\, dy\, dx$$

$$\int_1^4 \Big[(x+2)y \;+\; \frac{3}{2}y^2\Big]_{\frac{x-1}{3}}^{x-1} dx$$

$$= \int_1^4 (x+2)\frac{2}{3}(x-1) \;+\; \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{9}\, dx$$

$$= \int_1^4 \frac{2}{3}(x^2+x-2) \;+\; \frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}\cdot(x-1)^2\, dx \;=\; \frac{243}{9} \;=\; 27\,.$$

Abgabetermine: 15.12.-19.12.2014 oder 12.01-16.01.2015