Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

a) Gegeben ist die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x,y) \;=\; x \cdot \arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $g(x,y) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0,0)^{\mathrm{T}}$ implizit eine Funktion $y = f(x)$ definiert wird, mit $f(0) = 0$ und

$$g(x,\, y) \;=\; 0 \iff y = f(x)\,.$$

(ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom ersten Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweise: $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) \;=\; 0$.

b) Durch die Gleichung

$$g(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

wird in der Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0, y_0, z_0)^T := (0,1,1)^T$ ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ definiert.

Nach welcher(n) Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Bestimmen Sie die Tangentialebene an diese Fläche im Punkt $(0,1,1)^T$.

Lösung:

a) (i)

	Wert in $(0,0)^T$
$g(x,y) \;:=\; x \cdot \arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1$	0
$g_x(x,y) \;=\; \arctan(y) \,+\, e^{x+y}$	1
$g_y(x,y) \;=\; \frac{x}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	1

Es ist $g_y(0,0) \;=\; 1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich g nach y auflösen.

(ii) Implizites Differenzieren liefert:

$$g(x, y(x)) = 0 \Longrightarrow g_x + g_y \cdot y' = 0$$

also

$$f'(x) = y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}, \qquad f'(0) = -\frac{1}{1}, \qquad T_1(x;0) = f(0) + f'(0)(x-0) = -x\,.$$

b) Als Jacobi-Matrix von g ergibt sich

$$\mathbf{J}g(x,y,z) = \big((2x - 2ye^{xy})z, \quad -2xze^{xy}, \quad x^2 - 2e^{xy}\big)$$

und daher gilt $\mathbf{J}g(0,1,1) = (-2, 0, -2)\,.$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -2$ bzw. $\frac{\partial g}{\partial z} = -2$ sind als 1×1-Matrizen invertierbar.

Es gibt daher nach dem Satz über implizite Funktionen auf geeigneten Umgebungen von P_0 Funktionen $x(y,z)$ bzw. $z(x,y)$ mit

$x(1,1) = 0$ und $g(x(y,z), y, z) = 0$

bzw. $z(0,1) = 1$ und $g(x, y, z(x,y) = 0\,.$

Der Satz macht keine Aussage darüber, ob lokal nach y aufgelöst werden kann.

Der Gradient in einem Punkt der Fläche ist orthogonal zur Niveaufläche $g(x,y,z) = 0$ und zur Tangentialebene in diesem Punkt. Eine Parameterdarstellung der Tangentialebene ist zum Beispiel:

$$T = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Alternativ ergibt sich die Tangentialebene aus:

$$g_x(\boldsymbol{x}_0)(x - x_0) + g_y(\boldsymbol{x}_0)(y - y_0) + f_z(\boldsymbol{x}_0)(z - z_0) = 0.$$

Im konkreten Fall also wegen $g_y(0,1,1) = 0$ aus

$$g_x(\boldsymbol{x}_0)(x - x_0) + g_z(\boldsymbol{x}_0)(z - z_0) = -2x - 2z + 2 = 0.$$

Aufgabe 2:

Durch die Relation $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben. Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (+ Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Lösung zu 2:
Wegen $g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y) = g(-x,-y)$ ist die Kurve symmetrisch zur $y-$ Achse, zur $x-$ Achse und zum Ursprung.

i) Singuläre Punkte:

$g_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$

Kandidaten: $P_0 = \binom{0}{0}$, $P_1 = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$, $P_2 = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$

Für P_0 gilt $g(P_0) = 0$. Es handelt sich also um einen singulären Punkt.

Wegen $g(P_{1,2}) = -\frac{1}{4} \neq 0$ liegen die anderen zwei Kandidaten nicht auf der Kurve.

Zur Klassifikation des singulären Punktes P_0 berechnet man die zweiten Ableitungen:

$g_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2$, $g_{xy}(x,y) = 0$, $g_{yy}(x,y) = 2$

und die Hessematrix im singulären Punkt: $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Da diese indefinit ist, handelt es sich um einen Doppelpunkt.

ii) Punkte mit horizontaler Tangente:Wir haben bereits oben berechnet

$g_x = 0,\ g_y \neq 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y \neq 0$.

Zu erfüllen bleibt noch $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y) = -\frac{1}{4} + y^2 = 0$

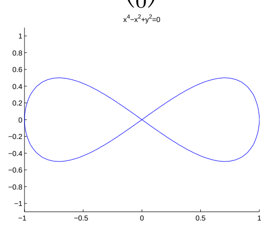
Damit erhält man die Punkte $P_{3,4} = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$ und $P_{3,4} = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$

iii)Punkte mit vertikaler Tangente:

Aus i) wissen wir $g_y = 0 \iff y = 0$. Der Punkt muss auf der Kurve liegen,also:

$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 1$

Der Punkt $\binom{0}{0}$ ist ein singulärer Punkt. Punkte mit vertikaler Tangente sind also $P_{7,8} = \binom{\pm 1}{0}$



. **Bearbeitungstermine:** 01.12.-05.12.2014