Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion

$$f(x,y) \,=\, xy \,+\, \cos(x)\,e^y$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. Verwenden Sie dazu einmal den Taylorschen Satz mit der Berechnung der partiellen Ableitungen und zum Zweiten die bekannten Reihenentwicklungen der auftretenden elementaren Funktionen in einer Variablen.

Lösung zu 1)

	Wert in $(0,1)^T$
$f(x,y) \,:=\, xy \,+\, \cos(x)\,e^y$	e
$f_x(x,y) = y \,-\, \sin(x)\,e^y$	1
$f_y(x,y) = x \,+\, \cos(x)\,e^y$	e
$f_{xx}(x,y) = -\,\cos(x)\,e^y$	$-e$
$f_{xy}(x,y) = 1 \,-\, \sin(x)\,e^y$	1
$f_{yy}(x,y) = \cos(x)\,e^y$	e
$f_{xxx}(x,y) = \sin(x)\,e^y$	0
$f_{xxy}(x,y) = -\,\cos(x)\,e^y$	$-e$
$f_{xyy}(x,y) = -\,\sin(x)\,e^y$	0
$f_{yyy}(x,y) = \cos(x)\,e^y$	e

$$\begin{aligned} T_3(x,y) = e \,+ x + e\cdot(y-1) - \frac{e}{2}\,x^2 + x(y-1) + \frac{e}{2}\,(y-1)^2 \\ - \frac{e}{2}\,x^2(y-1) + \frac{e}{6}\,(y-1)^3 \end{aligned}$$

Über die Reihen rechnet man wie folgt:

$$e^y \,=\, e^1\cdot e^{y-1} \,=\, e\left(1 + (y-1) + \frac{(y-1)^2}{2!} + \frac{(y-1)^3}{3!} + \cdots\right),$$

$$y \,=\, (y-1)\,+1\,,$$

$$\cos(x) \,=\, 1 - \frac{x^2}{2} \pm \cdots\ .$$

Einsetzen der Reihen ergibt:

$$f(x,y) = x[\,(y-1)+1\,]+e^1\cdot\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\pm\cdots\right)\left(1+(y-1)+\frac{(y-1)^2}{2!}+\frac{(y-1)^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

Multipliziert man nur die Terme bis Grad 3 aus, so erhält man

$$T_3(x,y) = x + x(y-1) + e^1\left(1+(y-1)+\frac{(y-1)^2}{2!}+\frac{(y-1)^3}{3!}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2(y-1)}{2}\right)$$

Umsortieren und Ausmultiplizieren ergibt die Darstellung, die wir oben über die Ableitungen erhalten hatten.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion

$$f\,:\,[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]\times[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y)\;=\;4x^2+xy+4y^2+\sin(x-y)\,,$$

indem Sie ein Minimum $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ des Taylorpolynoms zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$ berechnen.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds R_2 in dem errechneten Punkt $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange ab und berechnen Sie $\operatorname{grad} f(\tilde{x},\tilde{y})$.

c) Zeigen Sie, dass der minimale Wert von f auf dem oben angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als $-\frac{9}{49}$ sein kann.

Lösung 2:

a) Das Taylorpolynom zweiten Grades gibt die polynomialen Teile bis zum Grad 2 exakt wieder. Für den Sinusterm liest man das Taylorpolynom zweiten Grades aus der Reihenentwicklung

$$\sin(x-y)\;=\;(x-y)-\frac{(x-y)^3}{3!}+\frac{(x-y)^5}{5!}\mp\cdots$$

ab und erhält für f

$$T_2(x,y)=4x^2+xy+4y^2+(x-y)$$

und damit

$\operatorname{grad} T_2(x,y)=(8x+y+1,\;8y+x-1)$

$\operatorname{grad}\;T_2(x,y)=0\iff y=-1-8x\quad$ und $\quad 8(-1-8x)+x-1=0$

$\iff \tilde{x}=-\frac{1}{7},\;\tilde{y}=\frac{1}{7}$, einziger Kandidat für ein Minimum.

$H\,T_2(x,y)=\begin{pmatrix}8&1\\1&8\end{pmatrix}$

Die Eigenwerte der Hesse Matrix sind 7 und 9. Es liegt also ein Minimum vor.

$T_2\left(-\frac{1}{7},\;\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}=-0,142857\cdots$.

b) Alle dritten Ableitungen haben die Form $\pm\cos(x-y)$. Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist $C=1$. Damit erhält man

$$\left|R_2\left(-\frac{1}{7},\,\frac{1}{7}\right)\right|\le\frac{1\cdot 2^3}{3!}\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty^3=\frac{4}{21\cdot 49}<0.00389$$

Tatsächlich gilt $\left|f\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)-T_2\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)\right|\approx 0.0038714.$

$\operatorname{grad} f\left(-\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)\;=\;\begin{pmatrix}-1+\cos(-2/7)\\ 1-\cos(-2/7)\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}-0.0405\cdots\\ 0.0405\cdots\end{pmatrix}$

c) Auf dem angegebenem Definitionsbereich gilt

$$|R_2\,(x,\ y)| \leq \frac{1 \cdot 2^3}{3!} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty^3 = \frac{1}{48} < \frac{2}{49}$$

Für den minimalen Wert der Funktion gilt daher

$$f(x_{min}, y_{min}) \geq T_2(x_{min}, y_{min}) - \frac{2}{49} \geq T_2(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}) - \frac{2}{49} = -\frac{9}{49}$$