Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwinden die Determinanten der Jacobi-Matrizen?

$$f_1 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xy \\ xz^3 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^3 \ \to \ \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} u-2v \\ u-2w \\ v+w \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 \ = \ f_2 \circ f_1$$

$$f_4 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^+ \ \times \ [0,2\pi] \ \to \ \mathbb{R}^2\,, \qquad a,b \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_5 \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}\,, \qquad f_5(t) \ = \ \Phi(t, y(t)) \\ y \ : \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}\,, \quad \Phi \ : \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}, \quad \Phi, y \quad C^2-\text{Funktionen} \end{cases}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) **[Je 2 Punkte]**

$$Jf_1 \ = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z^3 & 0 & 3xz^2 \end{pmatrix} \qquad \det\, Jf_1 = 3xz^2 \cdot 2(x^2-y^2).$$

Die Determinante verschwindet für $x = 0$, oder $z = 0$ oder $y = \pm x$.

b)

$$Jf_2(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det\, Jf_2 = 4.$$

Die Determinante verschwindet nie.

c)

$$Jf_3 = Jf_2(f_1(x,y,z)) \cdot Jf_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x & 0 \\ 2x-2z^3 & 2y & -6xz^2 \\ y+z^3 & x & 3xz^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\, Jf_3 = \det\, Jf_2 \cdot \det\, Jf_1 = 0 \iff \det\, Jf_2 = 0 \vee \det\, Jf_1 = 0$$
$$\iff (x = 0 \vee z = 0 \vee y = \pm x)$$

d) (Vgl. Vorlesungsfolie 46)

$$Jf_4 = \begin{pmatrix} a\cos\phi & -ar\sin\phi \\ b\sin\phi & br\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\det\, Jf_4 = a \cdot b \cdot \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot r$$

Die Determinante verschwindet nur für $r = 0$ also im Ursprung.

e)

$$g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad Jg(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \qquad J\Phi \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Phi_y \end{pmatrix}$$

$$Jf_5 = J(\Phi \circ g) = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Phi_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi_t + \Phi_y \cdot \dot{y}$$

Die Determinante (in diesem Fall die Ableitung selbst) verschwindet für

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{\Phi_t}{\Phi_y} = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}$$

Hinweis für Gruppenleiter: In DGL I werden gerade exakte Differentialgleichungen besprochen. Dort benötigen wir die Ableitung von $\Phi(t,\, y(t))$ nach t.

Aufgabe 2:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *quellenfrei*, falls $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt. Im Fall $n = 3$ heißt das Vektorfeld *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt.

Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x, y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ (nach der üblichen Einbettung im $\mathbb{R}^3$) wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x, y) = 0 \iff (f_2)_x - (f_1)_y = \mathbf{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige f identisch verschwinded.

Lösungsskizze Aufgabe 2:

a) Sei $u := f_1$, $v := f_2$. Dann gilt $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = u_x + v_y$.

$$u_x = \frac{-y(-\alpha)(x^2 + y^2)^{\alpha-1} 2x}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}}$$
$$v_y = \frac{x(-\alpha)(x^2 + y^2)^{\alpha-1} 2y}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}}$$

Das Vektorfeld ist für alle $\alpha > 0$ quellenfrei. [**2 Punkte**]

Die übliche Einbettung im $\mathbb{R}^3$ liefert:

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{f}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}}, 0 \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

und damit

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x(x, y) - u_y(x, y) \end{pmatrix} .$$

$$v_x = \frac{(x^2 + y^2)^{\alpha} - x\alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} 2x}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}}$$
$$u_y = \frac{-(x^2 + y^2)^{\alpha} + y\alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} 2y}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}}$$

$$\textbf{rot}\,\boldsymbol{f}\,(x,y) \;=\; \frac{2(x^2+y^2)^\alpha - 2(x^2+y^2)\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} \;=\; \frac{2-2\alpha}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

Die Rotation verschwindet also genau dann, wenn $\alpha \;=\; 1$ ist. [**2 Punkte**]

b) $\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^2+y+4z,\; y^2+2z+5x,\; z^2+3x+6y\,)^{\mathrm{T}}$.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} \;=\; 2x+2y+2z, \quad \nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{f}) \;=(2,2,2)^T\,.\text{[\textbf{2 Punkte}]}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} \;=\; \begin{pmatrix}(f_3)_y-(f_2)_z\\(f_1)_z-(f_3)_x\\(f_2)_x-(f_1)_y\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}6-2\\4-3\\5-1\end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\;.\text{[\textbf{2 Punkte}]}$$

rot(div $\boldsymbol{f}$) ist nicht definiert. [**1 Punkt**]

Hier verschwindet zwar rot(rot $\boldsymbol{f}$) . Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt das allerdings nicht für beliebige f.

$$\tilde{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix}y^3\\0\\0\end{pmatrix} \implies \operatorname{rot}\tilde{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3y^2\end{pmatrix} \implies \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\tilde{f}(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix}-6y\\0\\0\end{pmatrix}\;.\text{[\textbf{1 Punkt}]}$$