Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \cos(2x-3y) + x^3 - y^3 + 2y^2 .$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z = f(x^0,y^0) + f_x(x^0,y^0)\,(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)\,(y-y^0) .$$

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(x^0,y^0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ an.

Lösungshinweise zur Aufgaben 1:

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \cos(2x-3y) + x^3 - y^3 + 2y^2 ,\\
f_x(x,y) &= -2\sin(2x-3y) + 3x^2 ,\\
f_y(x,y) &= 3\sin(2x-3y) - 3y^2 + 4y ,\\
f_{xx}(x,y) &= -4\cos(2x-3y) + 6x ,\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6\cos(2x-3y) ,\\
f_{yy}(x,y) &= -9\cos(2x-3y) - 6y + 4 ,\\
f_{xxx}(x,y) &= 8\sin(2x-3y) + 6 ,\\
f_{xxy}(x,y) &= f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y) = -12\sin(2x-3y) ,\\
f_{xyy}(x,y) &= f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y) = 18\sin(2x-3y) ,\\
f_{yyy}(x,y) &= -27\sin(2x-3y) - 6 .
\end{aligned}$$

b) $f(x,y) = \cos(2x-3y) + x^3 - y^3 + 2y^2, \qquad f(\frac{\pi}{4},0) = \frac{\pi^3}{64}$,

$f_x(x,y) = -2\sin(2x-3y) + 3x^2, \qquad f_x(\frac{\pi}{4},0) = -2 + \frac{3\pi^2}{16}$,

$f_y(x,y) = 3\sin(2x-3y) - 3y^2 + 4y, \qquad f_y(\frac{\pi}{4},0) = 3$,

Tangentialebene: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

$z = \frac{\pi^3}{64} + \frac{3\pi^2-32}{16}\,(x-\frac{\pi}{4}) + 3y$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}}$ einiger zweidimensionaler Strömungen

a) $u = 0, \quad v = 2x,$ **b)** $u = \dfrac{y}{2}, \quad v = -2x,$ **c)** $u = -2y, \quad v = 2x.$

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$).

Lösung zu 2:

a) Wegen $\dfrac{dx}{dt} = 0$, sind die Stromlinien Parallel zur $y-$ Achse. Wegen $\dfrac{dy}{dt} = 2x$ zeigen diese für $x > 0$ nach oben und für $x < 0$ nach unten. Sie werden mit der Geschwindigkeit $|2x|$ durchlaufen. Die Punkte auf der $y-$ Achse sind ruhende Punkte.

$\operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(x,y) = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\,(x,y) = v_x - u_y = 2 - 0 = 2$.

b) Stromlinien: Für $y \neq 0$:

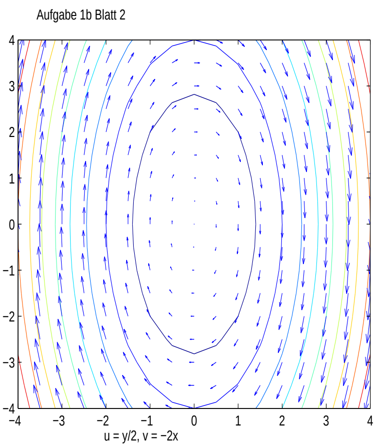
$$y'(x) = v(x,y)/u(x,y) = \frac{-2x}{\frac{y}{2}} \implies \int \frac{y}{2} dy = \int -2x dx$$

$$\implies \frac{y^2}{4} = -x^2 + \tilde{C} \iff \frac{y^2}{4} + x^2 = C^2$$

Die Stromlinien sind Ellipsen mit den Halbachsenlängen C und $2C$ mit Mittelpunkt Null. Strömung: im Uhrzeigersinn.

Für $y = 0$ erhält man Vektoren $\binom{0}{-2x}$ parallel zur $y-$ Achse mit der Länge $|2x|$.

$\operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(x,y) = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\,(x,y) = v_x - u_y = -2 - 0.5 = -2.5$.



Befehlsfolge:

```
x=[-4  :  .5  :  4];
 y=[-4  :  .5  :  4];
[X,Y]  = meshgrid(x,y);
z=0.25*Y.^2 + X.^2;
contour(X,Y,z);
hold on
  xt =   Y/2;
   yt =    -2*X  ;
  quiver(X,Y,xt,yt)
hold off
```

c) Hier erhält man analog zu b) $y^2 + x^2 = R^2$. Also Kreise mit Radius R um Null. Strömung: gegen Uhrzeigersinn.

$\operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(x,y) = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\,(x,y) = v_x - u_y = 2 - (-2) = 4$.

Bearbeitungstermine: 03.11–07.11.14