Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$43u_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta) + 48u_{\zeta\eta}(\zeta,\eta) + 57u_{\eta\eta}(\zeta,\eta) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass mit der Einführung der Variablen

$$x := \frac{1}{25\sqrt{3}}\,(\,3\zeta + 4\eta\,) \qquad \text{und } y := \frac{1}{25}\,(\,-4\zeta + 3\eta\,)$$

und der Funktion

$$\hat{u}(x,y) = \hat{u}(\,x(\zeta,\,\eta),\,y(\zeta,\,\eta)\,) = u(\zeta,\,\eta)$$

die oben gegebene Differentialgleichung in die Laplace Gleichung

$$\hat{u}_{xx} + \hat{u}_{yy} = 0$$

für (x,y) übergeht.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(\,\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion

$$f(x,y) = xy + \cos(x)\,e^y$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. Verwenden Sie dazu einmal den Taylorschen Satz (17.3.7) mit der Berechnung der partiellen Ableitungen und zum Zweiten die bekannten Reihenentwicklungen der auftretenden elementaren Funktionen in einer Variablen.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion

$$f\;:\;[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]\times[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]\to\mathbb{R}$$

$$f(x,y) = 4x^2 + xy + 4y^2 + \sin(x-y)\,,$$

indem Sie ein Minimum $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ des Taylorpolynoms zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$ berechnen.

b) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds R_2 in dem errechneten Punkt $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange (vgl. Vorlesung Punkt 17.3.7) ab und berechnen Sie grad $f(\tilde{x}, \tilde{y})$.

c) Zeigen Sie, dass der minimale Wert von f auf dem oben angegebenem Definitionsbereich nicht kleiner als $-\frac{9}{49}$ sein kann.

d) (Freiwillige Zusatzaufgabe) Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB (siehe z.B. fminunc) eine Näherung $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ für das Minimum von f . Berechnen Sie grad $f(\hat{x}, \hat{y})$.

Aufgabe 4: [3+4+3 Punkte] Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) [Klausur 2009] $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 2009,$$

b) $g(x,y) := (x^2 - y^2)e^{\frac{(-x^2-y^2)}{2}}$,

c) $g(x,y) := \frac{e^{-x^2-y^2}}{1+x^2+y^2}$. [Hinweis: erst Denken, dann maximal 5-6 Zeilen rechnen!]

Abgabetermine: 22.11.-26.11.2010