17.4.08

Vektoranalysis (Exkurs)

i) $\phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ Skalarfeld stetig partiell diffbar

$$\nabla\phi \equiv \operatorname{grad}\phi = \begin{bmatrix} \phi_{x_1} \\ \phi_{x_2} \\ \vdots \\ \phi_{x_n} \end{bmatrix}$$

heißt Gradient bzw. Gradientenfeld von ϕ.

ii) ϕ Skalarfeld, 2x stetig p. diffbar

$$\Delta\phi := \phi_{x_1x_1} + \phi_{x_2x_2} + \dots + \phi_{x_nx_n}$$

Laplace Operator.

(1) iii) $v : D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbares Vektorfeld. $v = (v_1, \dots, v_n)^t$

$$\operatorname{div} v := v_{1x_1} + v_{2x_2} + \dots + v_{nx_n}$$

Divergenz des Vektorfeldes

iv.) $D \subset \mathbb{R}^3$, $v : D \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar.

$$\operatorname{rot} v := \begin{bmatrix} v_{3x_2} - v_{2x_3} \\ v_{1x_3} - v_{3x_1} \\ v_{2x_1} - v_{1x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Rotation des VFes v.

17.12.08

Bemerkungen

i) ∇ Nabla-Operator $= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

ii) $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_{i x_i}$$

iii) v VF

$$\nabla v := \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \vdots \\ \nabla v_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta v := \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{bmatrix}$$

② iv) v, w VFen

$$(w \cdot \nabla)\, v := \begin{bmatrix} (w\cdot\nabla)\, v_1 \\ (w\cdot\nabla)\, v_2 \\ \vdots \\ (w\cdot\nabla)\, v_n \end{bmatrix},$$

wobei

$$(w\cdot\nabla)\, v_i = \sum_{j=1}^{n} w_j\, v_{i x_j}$$

siehe Kontinuumsmechanik, dort Navier-Stokes Gleichungen

<u>Bsp</u>: $K(x) = \frac{k}{|x|^3}\, x$, $x \in \mathbb{R}^3$

$k \neq 0$, $x \neq 0$

171208

$$\operatorname{div} K(x) = k\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{|x|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{|x|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3}{|x|^3}\right)\right\}$$

mit $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

also mit Hilfe d. Quotientenregel

$$\operatorname{div} K(x) = k\left\{ \frac{3}{|x|^3} - \frac{3|x|^2}{|x|^5}\right\} = 0$$

ii) $\phi(x) = -\frac{k}{|x|}$

$$\longrightarrow \quad \operatorname{grad} \phi(x) = \frac{k}{|x|^3}\, x = K(x)$$

③ **Mathe**: Rechenregeln

v VF, ϕ Skalarfeld (SF)

i.) $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0$ $\quad n=3$

ii.) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$ $\quad n=3$

iii.) $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$

iv.) $\operatorname{div}(\phi v) = \nabla\phi \cdot v + \phi \operatorname{div} v$

v.) $\operatorname{rot}(\phi v) = \nabla\phi \times v + \phi \operatorname{rot} v$ $\quad n=3$

vi.) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \nabla(\operatorname{div} v) - \Delta v$ $\quad n=3$

Dabei in v.):

$$\nabla\phi \times v = \begin{bmatrix} \phi_{x_2} v_3 - \phi_{x_3} v_2 \\ \phi_{x_3} v_1 - \phi_{x_1} v_3 \\ \phi_{x_1} v_2 - \phi_{x_2} v_1 \end{bmatrix}$$

17.12.08

<u>Nachweis</u>: z.B. iii)

$$\operatorname{div}(\nabla \phi) = \operatorname{div}\begin{bmatrix} \phi_{x_1} \\ \phi_{x_2} \\ \vdots \\ \phi_{x_n} \end{bmatrix}$$

$$= (\phi_{x_1})_{x_1} + (\phi_{x_2})_{x_2} + \dots + (\phi_{x_n})_{x_n}$$

$$= \phi_{x_1 x_1} + \phi_{x_2 x_2} + \dots + \phi_{x_n x_n}$$

$$= \Delta \phi .$$

i) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v)$

$$= \operatorname{div}\begin{bmatrix} v_{3x_2} - v_{2x_3} \\ v_{1x_3} - v_{3x_1} \\ v_{2x_1} - v_{1x_2} \end{bmatrix}$$

$$= (v_{3x_2} - v_{2x_3})_{x_1} + (v_{1x_3} - v_{3x_1})_{x_2} +$$

$$+ (v_{2x_1} - v_{1x_2})_{x_3} = 0$$

Rest allein.

<u>Merke</u>: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

i)

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

"Determinante"

ii) $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$

<u>Bsp</u>: $v(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_3^2 \\ x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}, \phi(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

i) $$\operatorname{rot} v(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 \\ 0 - x_2 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

17.12.08

$\rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 1 - 1 + 0 = 0$

ii) $\operatorname{rot}(\nabla \phi) = \operatorname{rot}\begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ x_3 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

iii) $\Delta \phi = \operatorname{div}(\nabla \phi)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

<u>Def.</u>: v VF und es gelte

$v = \nabla \phi$

mit ϕ SF. Dann heißt

⑤ ϕ Potential von v und v Potential- oder Gradientenfeld.

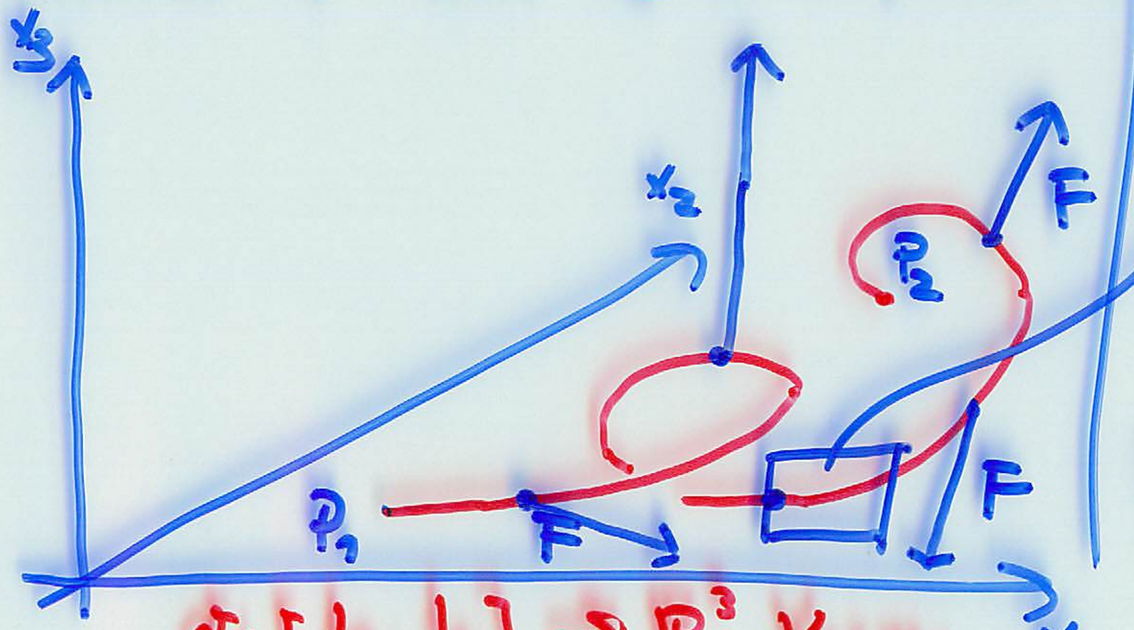
<u>Ausblick</u>: Ist K Potentialfeld, so ist Arbeit, die in K verrichtet wird, <u>unabhängig</u> vom Weg.

17.12.02

Vektorielles Kurvenintegral

<u>Motivation</u>: $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix}$ Kraftfeld

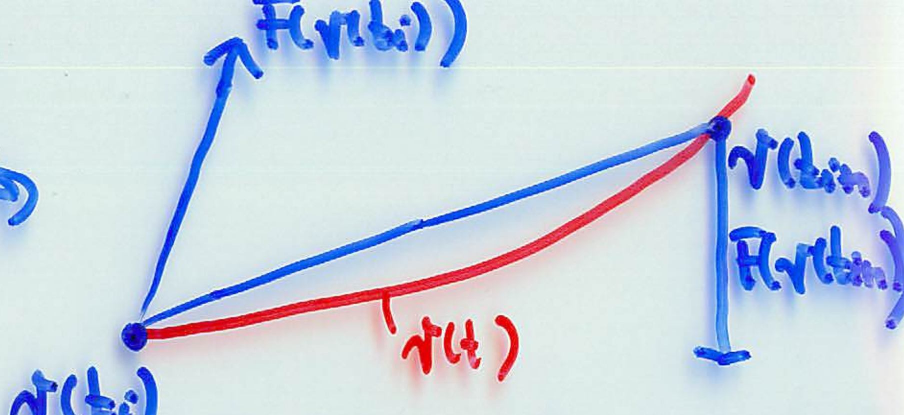
<u>Frage</u>: Arbeit, welche zu verrichten ist, um Masse von P_1 entlang Kurve r nach P_2 zu befördern.



$r: [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ Kurve

⑥

Zoom



$t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = t_e$

Unterteilung

Arbeit = Kraft $\cdot$ Weg,

also näherungsweise für

Weg von $r(t_i)$ nach $r(t_{i+1})$

$$\Delta W_i = F(r(t_i)) \cdot (r(t_{i+1}) - r(t_i))$$

Gesamtarbeit

$$W \approx \Delta W_0 + \Delta W_1 + \dots + \Delta W_{n-1}$$

Es gilt

$$\Delta W_i = F(\gamma(t_i)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)}_{\longrightarrow\ \dot{\gamma}(t)} (t_{i+1} - t_i)$$

Riemann-Integral liefert für Feinheit der Unterteilung gegen 0:

$$W = \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

<u>Def.:</u> (Arbeit entlang einer Kurve)

$\gamma : [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diffb. Kurve und $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ VF (Kraft-Feld)

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx := \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

heißt Integral von F entlang γ. Gilt $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ (geschlossene Kurve), so schreibe

$$\oint_\gamma F(x) \cdot dx .$$

Hier $dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$

Rechenregeln 17.12.08

i.) $\int_\gamma (F_1(x) + F_2(x)) \cdot dx$

$= \int_\gamma F_1(x) \cdot dx + \int_\gamma F_2(x) \cdot dx$

ii) $\int_\gamma \alpha F_1(x) \cdot dx = \alpha \int_\gamma F_1(x) \cdot dx$

iii) $\bar{\gamma}(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$,

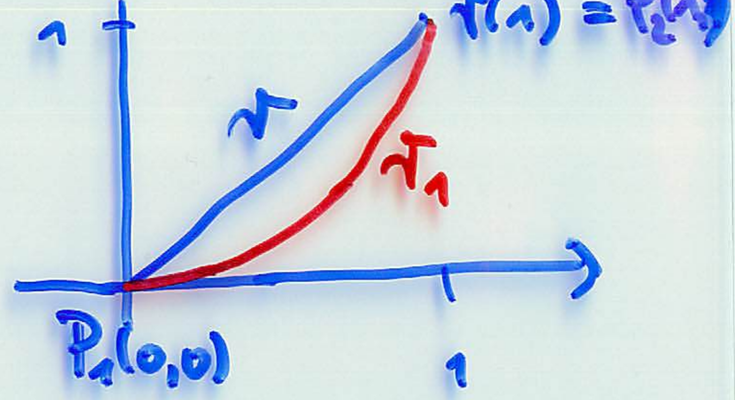
$t \in [t_a, t_e]$:

$\int_{\bar{\gamma}} F(x) \cdot dx = - \int_\gamma F(x) \cdot dx$

<u>Bsp</u> : $F(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

8



$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$F(\gamma(t)) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$

$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt$

$= \int_0^1 t^2 + t^3 \, dt = \frac{7}{12}$

Sei $\gamma_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^3 \end{bmatrix}$. Dann

$\int_{\gamma_1} F(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^7 \\ t^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{bmatrix} dt$

$= \int_0^1 t^7 + 3t^6 \, dt = \frac{31}{56} \neq \frac{7}{12}$

Also: Arbeit i.d.R. abhängig vom Weg.

Frage: Gibt es Kraftfelder, in denen Arbeit unabhängig vom Weg ist?

Ja, denn es gilt der

Erster Hauptsatz für Kurvenintegrale

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei Potentialfeld, d.h. $F(x) = \nabla \phi(x)$ mit SF $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \phi(\gamma(t_e)) - \phi(\gamma(t_a)),$$

⑨ d.h. Integration des VFes hier unabhängig vom Verlauf von γ.

Nachweis:

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx = \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \nabla \phi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t))\,dt$$

$$= \phi(\gamma(t_e)) - \phi(\gamma(t_a)).$$