Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

26. November 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.13 – notwendige Extremalbedingungen

Satz 5.11: Ist $\mathbf{x_0} \in \dot{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x_0}) = 0,$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden. (mit $\dot{D}$ werden die inneren Punkte von D bezeichnet).

Ist f 2 mal stetig partiell differenzierbar, so ist $H_f(x_0)$ negativ semidefinit, falls x_0 lokale Maximalstelle, positiv semidefinit, falls x_0 lokale Minimalstelle.

Buch Kap. 5.13 – Relative Extrema

Definition 5.33: Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $\mathbf{x_0} \in D$ ein Punkt, zu dem es eine Umgebung U mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0}) \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in U \cap D,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0},$$

gibt, so sagt man: f besitzt in $\mathbf{x_0}$ ein lokales oder relatives Maximum. Der Punkt $\mathbf{x_0}$ selbst heißt eine lokale Maximalstelle von f. Steht "$<$" statt "$\leq$", wird $\mathbf{x_0}$ als echte lokale Maximalstelle von f bezeichnet.

Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.12: Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x_0} \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x_0}) = 0$ ist eine

- **echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x_0}) < 0$,**
- **echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x_0}) > 0$,**

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \neq 0$.

Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.13: Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x_0} \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x_0}) = 0$ ist eine

a) **echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE**–Matrix $H_f(\mathbf{x_0})$ alle negativ sind,**
b) **echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE**–Matrix $H_f(\mathbf{x_0})$ alle positiv sind.**

Buch Kap. 5.13 – Extrema ohne Nebenbedingungen

Satz 5.14: (hinreichende Extremalbedingung im $\mathbb{R}^2$) Ist die reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig partiell differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

Ein Punkt $\mathbf{x_0} = \binom{x_0}{y_0} \in \dot{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

und

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine

a) **echte lokale Maximalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ gilt,**
b) **echte lokale Minimalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ gilt.**

Extrema ohne Nebenbedingungen

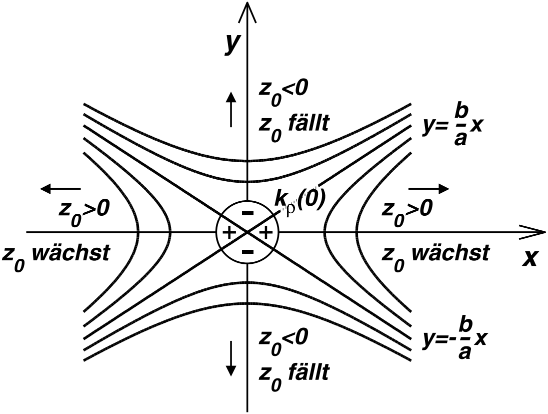

Abbildung 5.22: Sattelpunkt x = 0 der Fläche $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

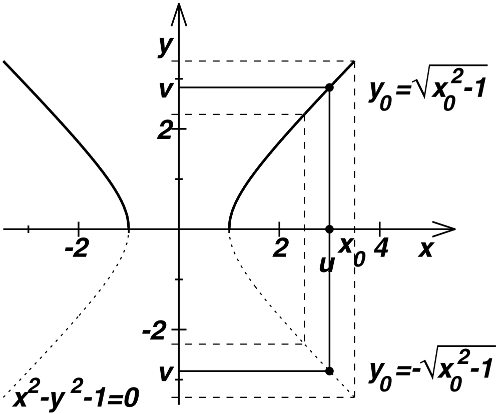

Abbildung 5.20: Zur Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ nach y

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

Satz 5.10: Durch $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{R}$ abbildet. Für einen Punkt $\binom{\mathbf{x}_0}{y_0} \in D$ gelte $f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$. Weiterhin sei $f_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$.

a) **Dann gibt es Umgebungen $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und $V(y_0) \subset \mathbb{R}$, s.d. zu jedem $\mathbf{x} \in U$ genau ein $y \in V$ existiert mit**

$$f(\mathbf{x}, y) = 0 \ .$$

Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$, $y = g(\mathbf{x})$, erfüllt

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in U \ ,$$

b) **Ferner ist g stetig differenzierbar in U mit**

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

Buch Kap. 5.12 – Satz über implizite Funktionen

Satz 5.10 (allgemeine Version): Sei $f : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, wobei $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen bezeichnen. Es gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und $D_y f(x_0, y_0)$ sei invertierbar.

Dann gibt es offene Mengen $V_1(x_0) \subset U_1$, $V_2(y_0) \subset U_2$ und eine stetige Funktion $g : V_1 \longrightarrow V_2$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \text{ für alle } x \in V_1.$$

Ferner ist g stetig diffbar mit

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Beachte: Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ mit $f(x, y) = 0$, so folgt schon $y = g(x)$.

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

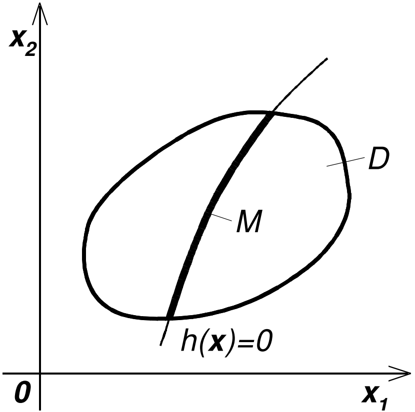

Abbildung 5.23: Die Menge $M = \{\mathbf{x} \in D \,|\, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ für $n = 2$ Raumdimensionen mit einer Nebenbedingung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h., $m = 1$.