26.11.08

Unrestringierte Mini (Maxi) mierung von Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$$

x_0 lokales Min (Max), falls $f(x_0) \underset{(\geq)}{\leq} f(x) \; \forall_{x \in K_\varepsilon(x_0)}$

notwendig:

$\nabla f(x_0) = 0$

$H_f(x_0)$ pos. semidefinit (neg.)

(1) hinreichend:

$\nabla f(x_0) = 0$ <u>und</u>

$H_f(x_0)$ pos. definit (neg.)

$\Rightarrow$ x_0 echtes lokales Minimum (Maximum).

<u>Wichtig</u>: Kriterien für positiv (negativ) definit

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv (negativ) definit

$\Rightarrow$ EWe sind reell und $\underset{(<)}{>} 0$

26.11.08

Hurwitz bzw Hauptminoren-kriterium für Definitheit

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sei $$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n$. Dann

A pos. definit gdw $\det A_k > 0$

② für $k = 1, 2, \ldots, n$

Anwendung auf $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

d.h. $H_f(x_0) \in \mathbb{R}^{2,2}$, d.h. $n=2$

<u>Merke</u>: Sei $n=2$, $\nabla f(x_0) = 0$

und

$$f_{x_1x_1}(x_0)\, f_{x_2x_2}(x_0) - f_{x_1x_2}(x_0)^2 > 0$$

Dann ist x_0

- echte Max. Stelle, falls $f_{x_1x_1}(x_0) < 0$
- echte Min. Stelle, falls $f_{x_1x_1}(x_0) > 0$.

26.11.08

Nachweis:

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) \end{bmatrix}$$

$A_1 = f_{x_1x_1}(x_0)$

$A_2 = H_f(x_0)$

$\det A_1 = f_{x_1x_1}(x_0)$

$\det A_2 = \det H_f(x_0)$

$= f_{x_1x_1}(x_0) f_{x_2x_2}(x_0) - f_{x_2x_1}(x_0) f_{x_1x_2}(x_0)$

$= f_{x_1x_1}(x_0) f_{x_2x_2}(x_0) - f_{x_1x_2}(x_0)^2$

③ Hurwitz: $\det A_1 > 0$, $\det A_2 > 0$

$\Rightarrow$ $H_f(x_0)$ pos. definit

$\Rightarrow$ x_0 echtes lokal Min

<u>Achtung</u>: Hurwitz sagt nur etwas aus über A pos. definit.

Hurwitz zum Nachweis von A neg. definit: zeige, dass $-A$ pos. definit.

Übung: Bestimme EW $\lambda_{1/2}$ von $H_f(x_0)$ im Fall $n=2$ und charakterisiere $\lambda_{1/2} > 0$ (<0).

26.11.08

__Bsp.__: $f(x) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3$

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_2 - 3x_1^2 \\ 3x_1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$= 0$ bei $P_1(0,0)$

und $P_2(1,1)$

Untersuche P_2

$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

$f_{x_1x_1}(1,1) = -6 < 0$

$f_{x_1x_1}(1,1) f_{x_2x_2}(1,1) - f_{x_1x_2}(1,1)^2$

$= (-6)(-6) - 3 \cdot 3 = 27 > 0$

④ Damit bei $P_2(1,1)$ lokales Maximum (striktes).

Untersuche $P_1(0,0)$:

$f_{x_1x_1}(0,0) f_{x_2x_2}(0,0) - f_{x_1x_2}^2(0,0) = -9$

$\rightarrow$ P_1 weder lokales Max noch lokales Min.

P_1 ist __Sattelpunkt__

__Def.__: $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diffbar, $x_0 \in D$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ besitze sowohl neg. als auch pos. EWe

26.11.08

Dann liegt bei x_0 Sattelpunkt vor.

$\underline{n=2}$: $\det H_f(x_0) < 0$

$\det H_f(x_0) = f_{x_1x_1}(x_0)\, f_{x_2x_2}(x_0) - f_{x_1x_2}^2(x_0)$

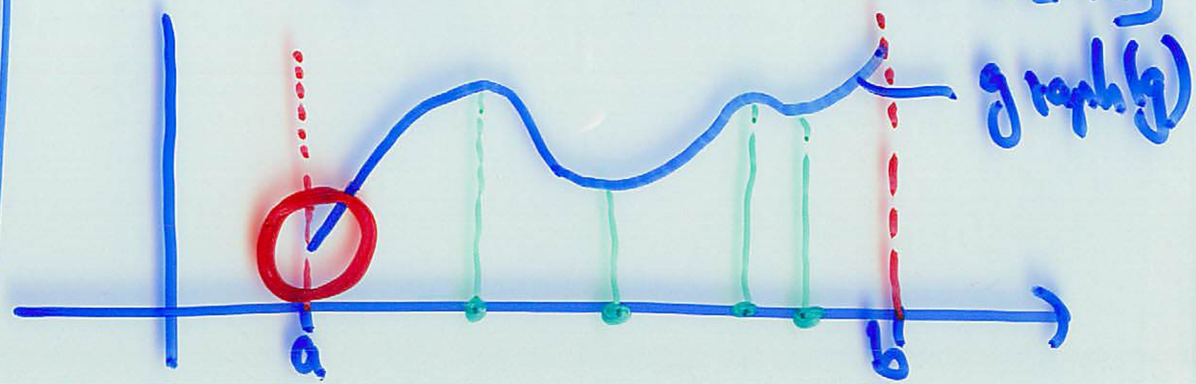
und $\nabla f(x_0) = 0$. Dann x_0 Sattelpunkt.

⑤ **Ausblick**: Mini (Maxi)mierung unter Restriktionen bzw. Nebenbedingungen

Sei $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x)$

Minimierungsaufgabe: Finde $x_0 \in [a,b]$ mit

$g(x_0) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$



6

$g'(x) = 0$ liefert

¡ ! !!

Hier gilt aber $x_0 = a$!

Und $g'(x_0) = 0$ ist <u>nicht</u> erfüllt

Schreibe $x = x_0 + s(\tilde{x} - x_0)$

mit $s \in (0,1)$. Damit

$$g(x_0) \leq g(x_0 + s(\tilde{x} - x_0))$$

gdw $0 \leq g(x_0 + s(\tilde{x} - x_0)) - g(x_0)$

gdw $0 \overset{s>0}{\leq} \frac{1}{s}\left(g(x_0 + s(\tilde{x} - x_0)) - g(x_0)\right)$

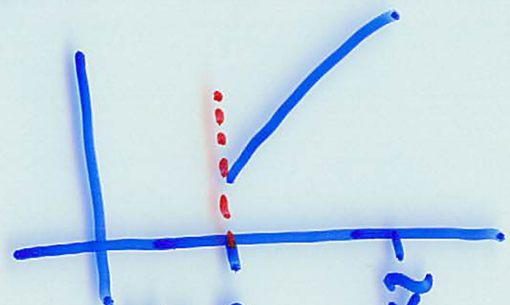
26.11.08

Damit gilt auch

$$\lim_{s \to 0+} \frac{1}{s}\left(g(x_0 + s(\tilde{x} - x_0)) - g(x_0)\right)$$

$$= g'(x_0)(\tilde{x} - x_0) \geq 0 \quad \forall \tilde{x} \in [a,b],$$

falls x_0 lokales Min.



$g'(x_0) = g'(a) \geq 0$, $\tilde{x} - x_0 \geq 0$

$g'(x_0) \leq 0$

$\tilde{x} - x_0 \leq 0$

26.11.08

Argumentation für f als Funktion von $M \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ analog;

x_0 mit $f(x_0) \leq f(x)$

$\forall x \in M$ (= zulässige Menge)

Dann

$$\nabla f(x_0)^t (\tilde{x} - x_0) \geq 0$$

für zulässige Richtungen $\tilde{x}$.

⑦ Beschreibung "zulässiger" Mengen M:

Bsp.:

$$\min f(x), \quad x \in \underbrace{\text{Rand der Einheitskugel}}_{= M}$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n ; \underbrace{|x|^2 - 1}_{=: h(x)} = 0\}$$

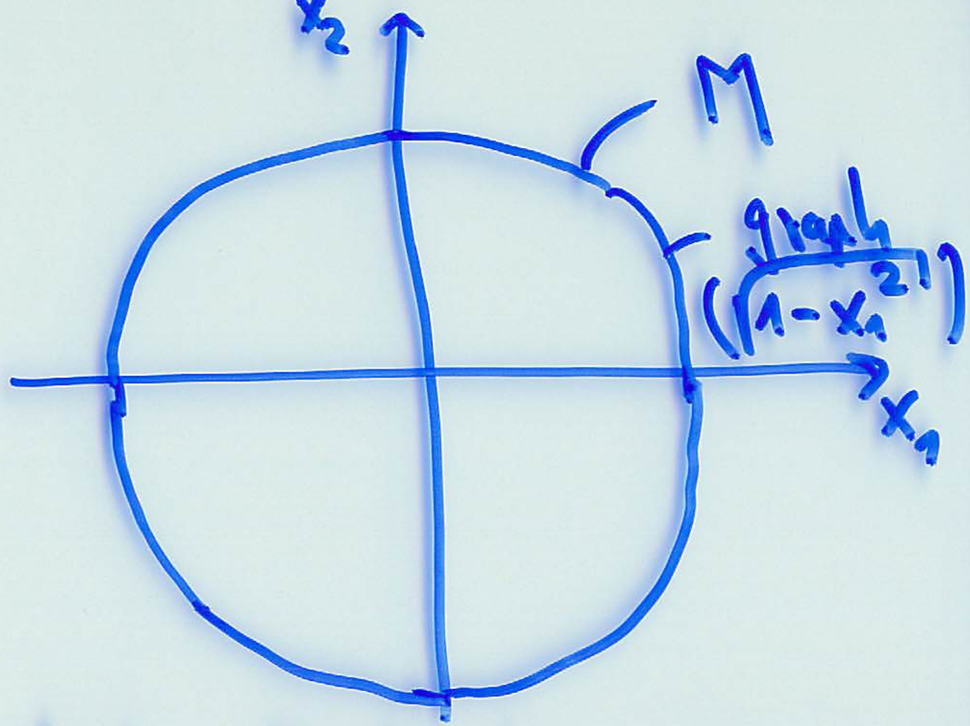
Damit Min Aufgabe

$\min f(x)$ bei $h(x) = 0$,

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

26.11.08

Graphisch:



<u>Ziel</u>: Beschreibe Niveau-Menge M lokal.

Hier: $x_2 = \sqrt{1-x_1^2}$ bzw. $x_2 = -\sqrt{1-x_1^2}$

8 für oberen bzw unteren Halbkreis, d.h. x_2-Koordinate ist Funktion der x_1-Koordinate!

Beschreibung von Niveau-Mengen, Satz über implizite Funktionen

Ausgangssituation

$F(x_1, x_2) = h \equiv$ konst.

Isobaren, Isothermen etc

26.11.08

Bsp: $F(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $h=1$. $F(x_1,x_2) = 1$ gdw $(x_1,x_2) \in$ Einheitskreis.

Für jedes $x_1 \in (-1,1)$ 2 Lösungen:

$$x_2 = \sqrt{1-x_1^2} \quad \text{und}$$

$$x_2 = -\sqrt{1-x_1^2}$$

Frage: Unter welchen Voraussetzungen ist es

(9) möglich, die Gleichung $F(x_1,x_2) = h$ in der Form

$$F(x_1, g(x_1)) = h$$

mit einer Funktion g zu schreiben?

Satz über implizite Funktionen

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen,

$$F: U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x, y) \longmapsto F(x,y)$$

stetig diffbar. $(x_0, y_0) \in U_1 \times U_2$

26.11.08

erfülle

$$F(x_0, y_0) = 0$$

und die $m \times m$ Matrix

$D_y F(x_0, y_0)$ sei invertierbar (Strukturvoraus.)

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1(x_0) \subset \mathbb{R}^k$ und $V_2(y_0) \subset \mathbb{R}^m$, mit $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$, und eine stetige Funktion

$$g : V_1 \to V_2$$

(10) mit

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1 .$$

Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0$, so gilt schon

$$y = g(x).$$

d.h. y lokal als graph(g) darstellbar!

Ferner ist g stetig diffbar mit

$$\underset{\mathbb{R}^{m,k}}{\underset{\cap}{Dg(x)}} = - \underbrace{D_y F(x, g(x))^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m,m}} \underbrace{D_x F(x, g(x))}_{\in \mathbb{R}^{m,k}}$$

26.11.08

Bsp: $F(x,y) = x^2 + y^2 - c$,

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h. $k = 1$,

$m = 1$.

$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = 1$

(Situation Einheitskreis)

$D_y F(x,y) = 2y$

$\Rightarrow D_y F(x_0,y_0) = \sqrt{2} \neq 0$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2$ und $(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

liefert $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$,

11

mit

$$g'(x) = Dg(x) = -D_y F(x, g(x))^{-1} \, D_x F(x, g(x))$$

$$= -\frac{1}{2y} \, 2x = -\frac{x}{g(x)}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$