Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

12. November 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit versus partielle Diffbarkeit

Satz 5.4: f : $D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist in dem inneren Punkt x_0 aus D differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f in einer Umgebung von x_0 existieren und in x_0 stetig sind.

Buch Kap. 5.8 – Differentiationsregeln

(i) **Linearität**
Sind f : $D \to \mathbb{R}^m$ und g : $D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in x_0, so ist auch $\lambda f + \mu g$ (λ und μ reell) in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)\ .$$

(ii) **Kettenregel**
Es sei h : $C \to D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $x_0 \in C$ und f : $D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $z_0 = h(x_0)$.
Dann ist auch $f \circ h : C \to \mathbb{R}^m$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(x_0) = f'(z_0)h'(x_0)\ .$$

Buch Kap. 5.8 – Kettenregel

$$
\begin{tikzcd}
R^n \arrow[rr, "f \circ h"] \arrow[dr, "h"'] & & R^m \\
& R^p \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

x_0

$z_0 = h(x_0)$

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= f(h(x_0)) \\
&= f \circ h(x_0)
\end{aligned}
$$

Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Defintion 5.29: Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset R^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] \ ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{a}$.

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Satz 5.5: Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x_0}$ stetig (woraus die Differenzierbarkeit von f in $\mathbf{x_0}$ folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{grad}\, f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{a} \; .$$

Buch Kap. 5.10 – Totales Differential

Defintion 5.31: Die durch

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0)dx_j$$

beschriebene lineare Funktion mit den Variablen $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ heißt das vollständige oder totale Differential von f in x_0. Die Funktion wird auch durch $df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$df(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0)dx_j$$

symbolisiert.

Buch Kap. 5.11 – TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.6: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\; D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und die Verbindung $[\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h}]$ von a und a + h sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gilt die TAYLOR-Formel

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) = f(\mathrm{a}) + \frac{1}{1!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)f(\mathrm{a}) + \frac{1}{2!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^2 f(\mathrm{a}) + \dots \\ \dots + \frac{1}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^p f(\mathrm{a}) + R(\mathrm{a},\mathrm{h})$$

mit dem Restglied

$$R(\mathrm{a},\mathrm{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^{p+1} f(\mathrm{a}+s\mathrm{h})\; ds\,.$$

Es gilt die Abschätzung

$$|R(\mathrm{a},\mathrm{h})| \le \frac{|\mathrm{h}|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{0\le s\le 1} \sqrt{\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{p+1}=1}^{n} |f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{p+1}}}(\mathrm{a}+s\mathrm{h})|^2}\,.$$

Buch Kap. 5.11 – TAYLOR Polynom

Defintion 5.32: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)-$mal stetig partiell differenzierbar, und $[a, a+h]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(a+h) := f(a) + \frac{1}{1!}(h \cdot \nabla) f(a) + ... + \frac{1}{p!}(h \cdot \nabla)^p f(a)$$

TAYLOR$-$**Polynom $p-$ten Grades der Funktion $f(x)$ an der Stelle a.**

Buch Kap. 5.11 – Mittelwertsatz

Satz 5.7: Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[\mathrm{a}, \mathrm{a} + \mathrm{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) - f(\mathrm{a}) = h_1 f_{x_1}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h}) + h_2 f_{x_2}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h}) + \dots \\ \dots + h_n f_{x_n}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h})$$

gilt. Es gilt die Abschätzung

$$|f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) - f(\mathrm{a})| \leq |\mathrm{h}| \sup_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathrm{a}+s\mathrm{h})|^2}\ .$$

Buch Kap. 5.11 – Quadratische Approximation

Satz 5.8: Das TAYLOR-Polynom 2. Grades einer Funktion f an der Stelle $\mathbf{x_0}$ kann man in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T H_f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$$

darstellen, wobei H_f die HESSE−Matrix der Funktion f bezeichnet.