

Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



5. November 2008

Beachtenswertes

- ▶ Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- ▶ Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>
- ▶ Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- ▶ Übungshefte: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.
- ▶ Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>

Buch Kap. 5.5 – Partielle Ableitung einer Funktion

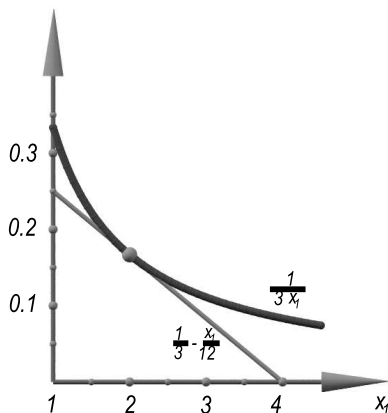
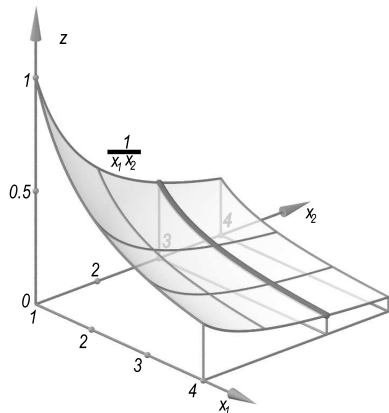


Abbildung 5.16: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, Abbildung 5.17: Graph von $f^*(x_1) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^* .

Buch Kap. 5.5 – Gradient einer Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar.
Der Vektor

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient der Funktion f bei \mathbf{x} .

Die Abbildung $\text{grad } f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine vektorwertige Abbildung, d.h. jedem $\mathbf{x} \in D$ wird mit $\text{grad } f(\mathbf{x})$ ein Vektor aus dem \mathbb{R}^n zugeordnet.

Buch Kap. 5.5 – höhere partielle Ableitungen

Definition 5.26: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

existiert, heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_j und x_i .

Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ für $i, j = 1, 2, \dots, n$, heißt f zweimal partiell differenzierbar.

Höhere partielle Ableitungen (k -te partielle Ableitungen oder auch partielle Ableitungen k -ter Ordnung) werden entsprechend rekursiv definiert;

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}) =: f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{x}), \quad \text{mit } 1 \leq k \leq p,$$

Buch Kap. 5.5 – Satz von Schwarz

Satz 5.3: Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, p -mal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}, \quad \text{mit } 1 < k \leq p,$$

unabhängig von der Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$. Die Indizes i_1, i_2, \dots, i_k sind dabei beliebige Elemente der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Defintion 5.27: Sei

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n \text{ offenen, } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

\mathbf{f} ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar, falls alle f_j ($j = 1, 2, \dots, m$) partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar sind.

Buch Kap. 5.6 – Ableitungsmatrix bzw. Jacobi Matrix

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, in \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$f'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix bzw. Ableitungsmatrix oder einfach Ableitung von f in \mathbf{x}_0 .

Die HESSE–Matrix einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit von Abbildungen

Definition 5.28: Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt x_0 von D differenzierbar, falls sie in x_0 partiell differenzierbar ist und in der Form

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

gilt.

f heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls f in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt f eine differenzierbare Abbildung.