Vektorwertige Funktionen.

Definition: *Sei* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$ *eine vektorwertige Funktion. Die Funktion* $\mathbf{f}$ *heißt* `partiell differenzierbar` *in* $\mathbf{x}^0 \in D$, *falls für alle* $i = 1, \ldots, n$ *die Grenzwerte*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad \textit{für } i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Vektorfelder.

Definition: *Für* $m = n$ *nennt man die Funktion* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ *ein* Vektorfeld *auf* D. *Ist jede Koordinatenfunktion* $f_i(\mathbf{x})$ *von* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ *eine* C^k*-Funktion, so nennt man* $\mathbf{f}$ *ein* C^k-Vektorfeld. □

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: *Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ *definiert man die* Divergenz *in* $\mathbf{x} \in D$ *durch*

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

oder

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Rechenregeln und Rotation.

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\alpha\mathbf{f}+\beta\mathbf{g}) &= \alpha\operatorname{div}\mathbf{f}+\beta\operatorname{div}\mathbf{g} && \text{für } \mathbf{f},\mathbf{g}: D \to \mathbb{R}^n \\ \operatorname{div}(\varphi\cdot\mathbf{f}) &= (\nabla\varphi,\mathbf{f})+\varphi\operatorname{div}\mathbf{f} && \text{für } \varphi: D\to\mathbb{R}, \mathbf{f}: D\to\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition: *Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ *offen,* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$, *definiert man dessen* Rotation *in* $\mathbf{x} \in D$ *durch*

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T\Bigg|_{\mathbf{x}}$$

$\square$

Alternative Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g} && \text{für } \mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot}(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f} && \text{für } \varphi : D \to \mathbb{R}, \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2-Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets `rotationsfrei`. □

17.2 Das vollständige Differential

Definition: *Sei* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{D}$ *und* $\mathbf{f} : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^m$*. Die Funktion* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *heißt* differenzierbar *in* $\mathbf{x}^0$ *(oder* vollständig differenzierbar *bzw.* total differenzierbar *in* $\mathbf{x}^0$*), falls es eine lineare Abbildung*

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *gibt, für die die Approximationseigenschaft*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

gilt, d.h.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

□

Das vollständige Differential.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung $\mathbf{l}$ das (vollständige Differential oder das totale Differential von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}^0$, und man bezeichnet $\mathbf{l}$ mit $\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$.

Die zugehörige Matrix $\mathbf{A}$ heißt Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ und wird mit $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ oder mit $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0.

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion $(m = 1)$ ist $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$. $\square$

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: *Sei* $\mathbf{f} : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$, D *offen.*

(a) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathbf{x}^0$ *differenzierbar, so ist* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *auch stetig in* $\mathbf{x}^0$.

(b) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathbf{x}^0$ *differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

(c) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *eine* C^1*-Funktion auf* D, *so ist* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *auf* D *differenzierbar.*

Beweis von (a): Ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|} = 0.$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| = 0,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| + \|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| \\ &\to 0 \qquad \text{für } \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $\mathbf{f}$ stetig im Punkt $\mathbf{x}^0$. $\square$

Beweis von (b): Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Da $\mathbf{f}$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{|t|} - \frac{t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|} \\
&= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \right) \\
&\to 0 \qquad (t \to 0)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Beweisidee für (c): Anwendung des Mittelwertsatzes (**Übung**). ■

Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

- Betrachte die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2\cos(s) & 3\cos(s) \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$