

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

- a) Man berechne  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left( yz + \cos(x + y), xz + \frac{1}{y + z}, xy + \frac{1}{y + z} \right)^T.$$

- b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T.$$

- (i) Man berechne  $\operatorname{div} \mathbf{g}$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{g}$  und  
(ii) zeichne das Vektorfeld und einige Stromlinien im Bereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'meshgrid', 'quiver' und 'contour'.

#### Aufgabe 6:

- a) Man berechne für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = xy$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  die Ableitung in Richtung  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$ . Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  in den durch die Gerade  $3y - 5x = 7$  gegebenen Richtungen?  
b) Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Man zeichne die Funktion im Bereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezmesh'.  
(ii) Man berechne für  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  alle Richtungsableitungen.  
(iii) Man überprüfe, ob  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  (vollständig) differenzierbar ist.

**Aufgabe 7:**

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\text{a) } \mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = rt \\ v = \ln(s+t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ u \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(u(r, s, t), v(r, s, t)).$$

$$\text{b) } \mathbf{g} : ]0, \infty[ \times ]0, \pi/2[ \xrightarrow{\mathbf{g}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(x(r, t), y(r, t)).$$

$$\text{c) } \mathbf{h} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \xrightarrow{\mathbf{h}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{h}_2} \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x = 1/(t^3 + 1) \\ y = t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ xy^2 \end{pmatrix} = \mathbf{h}(x(t), y(t)).$$

**Aufgabe 8:**

Gegeben seien die 'Hyberbelkoordinaten'

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

mit  $(u, v) \in D := [0, 5] \times [1, 3]$ .

- Man berechne  $\mathbf{J} \Phi(x, y)$  und  $\det(\mathbf{J} \Phi(x, y))$  sowie
- bzgl.  $D$ :  $\Phi^{-1}(u, v)$ ,  $\mathbf{J} \Phi^{-1}(u, v)$  und  $\det(\mathbf{J} \Phi^{-1}(u, v))$ .
- Man skizziere  $\Phi^{-1}(D)$  im  $(x, y)$ -Koordinatensystem.
- Man transformiere  $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$  mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. 'Hyberbelkoordinaten'.

**Abgabetermin:** 12.11. - 16.11. (zu Beginn der Übung)