Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.24: (Konvergenzradius)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c > 0, \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0,$$

so ist

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad \text{bzw.} \qquad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der Konvergenzradius der Reihe.

Buch Kap. 3.5 – Operationen mit Potenzreihen

Satz 3.25: (Konvergenz von Summe und Produkt)
Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k$$

bzw.

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

mit $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$ (Cauchy Produkt).

Buch Kap. 3.5 – Operationen mit Potenzreihen

Satz 3.26: (gliedweises Differenzieren und Integrieren) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$ und der Summe $f(x)$.

a) **Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist auf dem Konvergenzintervall $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe: z.B. ist**

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} .$$

b) **$f(x)$ ist weiter über jedes abgeschlossene Teilintervall $[a, b]$ des Konvergenzintervalls integrierbar (da stetig). Das Integral darf durch gliedweise Integration der Potenzreihe gebildet werden:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} [(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}] .$$

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von **exp** *x*

Definition 3.12: (Exponentialfunktion)
Die Funktion exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt Exponentialfunktion.

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von exp *x*

Satz 3.27: (Additionstheorem)

Für die gemäß

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

erklärte Exponentialfunktion gilt das Additionstheorem

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y).$$