

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Department Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2009

1

Informationen zur Vorlesung

- **Sprechstunde**
Montag, 9:00-9:40 SBS 95 Raum 2073
- **Klausureinsicht Analysis I**
Mittwoch, den 8. April 2009, siehe Internet
- **Erste Übung zu Analysis II**
Im Internet verfügbar, Übungsbetrieb startet nächste Woche
- **Erste Anleitung**
Dienstag, den 7. April 2009

2

5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion Φ

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

und

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

3

Fixpunkt–Iteration: Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

4

Ergebnis der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \quad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \quad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \rightarrow \infty$, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.1655\ 61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder: $|x_{k+1} - x_k|$

5

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$ heißt **Lipschitz–stetig** auf D , falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante L nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$ heißt **kontrahierend**, falls $L < 1$ gilt.

Man nennt dann L die **Kontraktionskonstante** von Φ .

Bemerkung: Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!

Es gelte die Abschätzung

$$\forall x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend!

6

Satz: Jede C^1 -Funktion $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz-Konstanten

$$L := \sup \{|\Phi'(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Ist $L < 1$, so ist Φ kontrahierend; ist dagegen $L > 1$, so ist Φ nicht kontrahierend!

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y|$$

Beispiel: Betrachte die Funktion $\Phi(x) = e^{-x}$. Dann gilt

$$\Phi'(x) = -e^{-x}$$

Lipschitz-Konstante

$$L := \sup \{|e^{-x}| : a \leq x \leq b\}$$

7

Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei $D \subset V$ abgeschlossen und $\Phi : D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung der Menge D in sich mit einer Kontraktionskonstanten L (also $L < 1$).

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- 1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D
- 2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*
- 3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

8

Beispiel: Berechne den kleinsten Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1e^x$
Setze $D = [0, 1]$, dann gilt

$$0 < \Phi(x) \leq \frac{\exp(1)}{10} < 1$$

Daher bildet Φ das Intervall $D = [0, 1]$ auf sich ab.

$$\Phi(x) = \Phi'(x) = 0.1e^x$$

Damit ist Φ auf D kontrahierend mit $L := \exp(1)/10$.

Berechne Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von ca. 10^{-6} :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \|x_1 - x_0\| \leq 10^{-6}$$

Daraus ergibt sich mit $x_0 = 1$ und damit $x_1 = \exp(1)$

$$n \geq \frac{-6}{\log_{10} L} \approx 10.61$$

Tatsächlich ergibt sich nach 11 Iterationen eine zehnstellige Genauigkeit.

9

Bemerkung: Existiert eine abgeschlossen Kugel

$$K = \{x \in V \mid \|x - y_0\| \leq r\}$$

mit den Eigenschaften

1) $\Phi : K \rightarrow V$ ist kontrahierend mit Konstraktionskonstante $L < 1$

2) $\|\Phi(y_0) - y_0\| \leq (1 - L)r$

so gilt $\Phi(K) \subset K$ und der Fixpunktsatz lässt sich mit $D = K$ anwenden.

Beweis: Betrachte ein $y \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - y_0\| &\leq \|\Phi(y) - \Phi(y_0) + \Phi(y_0) - y_0\| \\ &\leq L\|y - y_0\| + (1 - L)r \\ &\leq r \end{aligned}$$

10

Kapitel 6: Potenzreihen und elementare Funktionen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$

Definition: Zur Konvergenz von Funktionenfolgen definieren wir

- 1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **punktweise** gegen eine Funktion f , falls gilt:

$$\forall z \in D \quad : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$$

- 2) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \right] = 0$$

11

Beispiel: Betrachte die Funktionenfolge (f_n) definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist aber **nicht** gleichmäßig, denn

$$\|f_n - f\|_{\infty} = 1 \quad \forall n \geq 0$$

Jede Funktion $f_n(x)$ der Folge ist außerdem **stetig**

Die Grenzfunktion f ist **nicht** stetig!

12

Beispiel: Wir betrachten die Funktionfolge

$$f_n(x) = nx \exp(-nx) \quad n \geq 1$$

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$, allerdings:

$$f'_n(x) = n \exp(-nx) - n^2 x \exp(-nx) = n \exp(-nx)(1 - nx)$$

Aus $f'_n(x) = 0$, folgt $x = 1/n$. Weiter gilt:

$$f''_n(1/n) < 0$$

Das Maximum der Funktion $f_n(x)$ liegt bei $x = 1/n$ mit

$$f_n(1/n) = \exp(-1) \quad \forall n \geq 1$$

13

Satz: Konvergiert eine Funktionfolge (f_n) mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f und sind die Funktionen f_n stetig auf D , so ist auch die Grenzfunktion stetig auf D .

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und n so gewählt, dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Weiter sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\forall z \in D \quad : \quad \|z - z_0\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

14

Satz: Gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen

1) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

Gegeben seien Funktionen $f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$. Gilt dann für $b_k \in \mathbb{R}$: $\forall z \in D : |f_k(z)| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$,

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig und absolut konvergent auf D .

2) Sind die Funktionen $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $[a, b]$ und die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z)$ gleichmäßig konvergent, so ist auch $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z)$$

für alle $x \in [a, b]$.

6.2 Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

$$(1) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt **(komplexe) Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dabei gilt $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel: (3.4 Konvergenzkriterien für Reihen aus Analysis I)

Die Exponentialfunktion ist über eine Potenzreihe definiert:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln z, \quad a^z, \quad \cosh(z), \sinh(z), \quad \cos(z), \sin(z), \quad \tan(z), \cot(z)$$

Beispiel: Eine Potenzreihe für reelle Zahlen ist die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Die Taylor-Reihe einer C^∞ -Funktion ist im Allgemeinen

nicht konvergent.

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch** oder eine C^ω -Funktion (aus Analysis I).

17

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

- 1) Zu jeder Potenzreihe (1) gibt es eine Zahl r , $0 \leq r \leq \infty$, den sogenannten **Konvergenzradius** der Potenzreihe mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

- 2) Konvergenzradius nach der **Formel von Cauchy, Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (\text{siehe 3.2 aus Analysis I})$$

Dabei setzt man: $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$

18

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

3) Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw. gleich ∞ ist, ist er gleich dem Konvergenzradius r :

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

4) Formal kann man Potenzreihen differenzieren und erhält

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Dies ist wiederum eine Potenzreihe.

Der Konvergenzradius ist identisch mit dem Konvergenzradius der Ausgangsreihe (auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$).

Beweis: Teil 1): Wir definieren

$$r := \sup \left\{ |w| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.

Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe (absolut) konvergent nur für $z = z_0$.

Sei also $r > 0$ und $0 < \rho < r \Rightarrow$

$$\exists w \in \mathbb{C}, |w| > \rho : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent}$$

$$\exists M > 0 : \forall k \geq 0 : |a_k w^k| \leq M \quad ((a_k w^k)_{k \geq 0} \text{ ist beschränkt})$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

Es gilt:

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$ eine **geometrische Reihe**.

Wir haben demnach

$$|a_k(z - z_0)^k| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

Majorantenkriterium von Weierstraß \Rightarrow

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$.

21

Teil 2): Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} < q \leq 1 &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} < 1 \\ &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1 \\ &\Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \end{aligned}$$

Teil 3): Die erste Aussage folgt aus Teil 2).

Für den zweiten Teil verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Also:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

22

Teil 4): Nach Teil 2) ist zu berechnen:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$$

Wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Also sind die Konvergenzradien der Ausgangsreihe und der abgeleiteten Reihe identisch.

Bemerkung: Die Konvergenz von $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ zeigt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{k} &:= 1 + r_k, \quad r_k \geq 0 \Rightarrow k = (1 + r_k)^k \geq 1 + \frac{k(k-1)}{2} r_k^2 \\ &\Rightarrow r_k^2 \leq \frac{2}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \\ &\Rightarrow r_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

23

Beispiel:

1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $k!z^k$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge.

2) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.

3) Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

4) Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = \frac{1}{2} (2 + 6z + 12z^2 + \dots)$$

24

Beispiel:

- 5) Aus Teil 4) des letzten Satzes folgt auch, dass die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe besitzt.

Beispiel: Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad |z| < 1$$

ergibt eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad -1 < x < 1$$

25

Beispiel:

- 5) Fortsetzung:

Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

ergibt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad -1 < x < 1$$

Bemerkung:

- 1) Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises mit Radius r stetig.

Reelle Potenzreihen sind auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ auch C^∞ -Funktionen.

Eine reelle Potenzreihe ist gleich der Taylor-Reihe einer Funktion.

26

Bemerkung:

2) Es gilt der folgende **Identitätssatz** für Potenzreihen:

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \quad \forall k$$

3) **Abelsche Grenzwertsatz**

Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere auch in den zum Konvergenzbereich gehörigen Randpunkten des Konvergenzintervalls.

27

Beispiel: Da die Reihe

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} x^{k+1}, \quad -1 < x < 1$$

auch für $x = +1$ konvergiert, folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz, dass die obige Gleichung auch in $x = 1$ gültig ist:

$$\ln(1 + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} 1^{k+1}$$

Daraus folgt:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1}$$

28

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gelten:

1)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \quad |z| < \min(r_1, r_2)$$

2)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \quad |z| < r_1$$

3) **Cauchy-Produkt für Potenzreihen**

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) z^k, \quad |z| < \min(r_1, r_2)$$

29

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

4) Ist $f(0) = 0$, so lässt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen. Es gibt also ein $r_3 > 0$ und $c_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < r_3$$

5) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung. Es gilt also $r_4 > 0$ und $d_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad |z| < r_4$$

Die Koeffizienten d_k lassen sich rekursiv berechnen:

$$a_0 d_0 = 1, \quad a_0 d_k = - \sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dies ergibt sich direkt aus dem Cauchy-Produkt.

30

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

1) Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\sum \frac{x^k}{k!}$:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Analog erhält man für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

31

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

2) Für $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l \right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \right) \cdot (1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^3 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \right) x^4 + \dots \quad -1 < x < 1\end{aligned}$$

32

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

3) Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners:

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ machen wir daher den Ansatz:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

Damit gilt:

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

33

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^{k+1}$$

Also muss gelten:

$$\sum_{l=0}^k \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ 0 & : k > 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$B_0 = 1, \quad B_k = - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

34

6.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow \exp(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt und stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1$$

Gewöhnliche Differentialgleichung: suche eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

(Eindeutige) Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

35

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z) \neq 0, \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) > 0$$

4) Asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

36

5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

6) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

7) Es gilt:

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.718281828459045235360287 \dots$$

Weiter ist e eine **irrationale Zahl**, sogar eine **transzendente Zahl**.

8) Für alle $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(qx) = (\exp(x))^q$$

37

Der natürliche Logarithmus

Da die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} streng monoton wachsend ist, existiert die **Umkehrfunktion**:

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Diese Funktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften:

- 1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.
- 2) Es gilt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.
- 3) Funktionalgleichung:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y > 0$$

38

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \quad \forall x > 0, q \in \mathbb{Q}$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad (-1 < x < 1)$$

39

Die allgemeine Potenz

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen**:

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \quad (a > 0, z \in \mathbb{C})$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenz:

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

40

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den **Logarithmus zur Basis** a . Es gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0)$$

4) Es gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0)$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R}, x > 0)$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (x, a > 0)$$

41

5) Verallgemeinerung des binomischen Satzes:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad (a \in \mathbb{R}, -1 < x < 1)$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \quad (k \geq 0)$$

Spezialfälle sind die beiden Entwicklungen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung

$$(1+x)g'(x) = ag(x)$$

42

Die hyperbolischen Funktionen: Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Die entsprechenden Potenzreihenentwicklungen sind (siehe oben):

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Eigenschaften:

1) Die Funktion \cosh ist **gerade**, d.h.

$$\cosh(-z) = \cosh(z)$$

Dagegen ist die Funktion \sinh **ungerade**, d.h.

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

43

2) Ableitungen der hyperbolischen Funktionen. Es gilt:

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

3) Funktionalgleichungen:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

4) Algebraische Relation:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

44

Inverse hyperbolische Funktionen, Areefunktionen:

Die Funktion \sinh ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R} , \cosh auf $[0, \infty)$:

Die Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit **arcosh** und **arsinh**

Es gilt:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1 \leq x < \infty)$$

sowie

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (1 \leq x < \infty)$$

45

Die trigonometrischen Funktionen:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Konvergenzradius $r = \infty \Rightarrow$ Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

- 1) \sin ist eine ungerade, \cos eine gerade Funktion

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z)$$

und

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1$$

46

2) Es gilt:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y)$$

sowie

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

3) Funktionalgleichungen

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \quad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

4) Reelle Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

47

Die komplexen Tangens- und Kotangensfunktionen

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \quad (z \neq k\pi)$$

Eigenschaften:

1) tan und cot sind π -periodische, ungerade Funktionen.

2) Es gilt:

$$\tan z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad (z \neq k\pi)$$

48

3) Reihen-Entwicklungen:

$$\begin{aligned}\tan z &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad (0 < |z| < \pi)\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k} .

49

4) Reelle Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi)$$

50

Kapitel 7: Interpolation

7.1 Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Stützstellen)

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n) \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

Gesucht: **Einfache** Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Daten **interpoliert**:

$$p(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(p = Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion)

Zunächst: Klassische Polynom–Interpolation

Bestimme ein Polynom höchstens n -ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert.

51

Erster Lösungsansatz: Interpolationsbedingungen ergeben ein LGS

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= f_1 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots = \quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= f_n \end{aligned}$$

Vandermonde–Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

52

Es gilt (Beweis mittels vollständiger Induktion)

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Satz: Sind die Knoten x_j des Interpolationsproblems paarweise verschieden, d.h.

$$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$$

so **existiert genau ein** Polynom p_n höchstens n -ten Grades, das die Interpolationsbedingungen

$$p_n(x_j) = f_j \quad j = 0, 1, \dots, n$$

erfüllt.

Aber:

LGS mit Vandermonde-Matrix ist **numerisch** zu kompliziert!

53

7.2 Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Interpolation nach Lagrange:

Wir definieren

$$\begin{aligned} l_j(x) &:= \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $j = 0, \dots, n$:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

Also wird die Interpolationsaufgabe gelöst durch das Polynom $p_n(x)$

$$p_n(x) := f_0 l_0(x) + \dots + f_n l_n(x) = \prod_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

54

Beispiel: Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann gilt:

$$\begin{aligned}l_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} & l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} & l_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\end{aligned}$$

Das Polynom ist dann:

$$\begin{aligned}p_n(x) &= 4 \cdot l_2(x) + 18 \cdot l_3(x) \\&= -4 \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\&= x^3 - x^2\end{aligned}$$

55

Interpolation in der Newton-Darstellung:

Das Interpolationsproblem wird auch gelöst durch das Newton-Polynom

$$\begin{aligned}p_n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\&= c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_n .

Insbesondere gilt dann:

$$\begin{aligned}p_n(x_0) &= c_0 \\p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

56

Was sind die Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_n ?

$$p_n(x_0) = c_0 \stackrel{!}{=} f_0 \Rightarrow c_0 = f_0$$

$$p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} f_1 \Rightarrow c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$\vdots = \vdots$

$$p_n(x_n) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_n - x_j)$$

$$= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \dots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$\stackrel{!}{=} f_n$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)} \left(f_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \prod_{i=0}^{j-1} (x_n - x_i) \right)$$

57

Folgerungen:

- 1) Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j + 1)$ Punkte $(x_0, f_0), \dots, (x_j, f_j)$.

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j] \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

- 2) Nimmt man eine Stützstelle (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

mit

$$c_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\prod_{j=0}^n (x_{n+1} - x_j)}$$

58

Methoden zur Polynomwertberechnung:

Auswertung eines gegebenen Polynoms über das **Horner–Schema**:

Sei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Man berechnet $p(\xi)$ an einer festen Stelle ξ mittels

$$p(\xi) = a_0 + \xi(a_1 + \xi(a_2 + \xi(\dots(a_{n-1} + a_n\xi)\dots)))$$

Rekursive Darstellung:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + \xi b_{k+1}, \quad k = n-2, \dots, 1, 0$$

$$b_{-1} = a_0 + \xi b_0$$

Dann gilt $p(\xi) = b_{-1}$.

59

(Effiziente) Berechnung des Newton–Polynoms über

Methoden der dividierten Differenzen

Satz: Definiert man die sogenannten dividierten Differenzen mittels

$$f[x_j] = f_j \quad j = i, i+1, \dots, i+k$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

so gilt

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j],$$

d.h. die dividierten Differenzen ergeben gerade die Koeffizienten des Newton–Polynoms.

60

Berechnungsschema zu den dividierten Differenzen (für $n = 3$):

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

wobei

$$f[x_j] = f_j \quad j = i, i+1, \dots, i+k$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

61

Der Interpolationsfehler:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - \left(p_{n+1}(x) - c_{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right) \\ &= f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) \end{aligned}$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Abschätzung für den Interpolationsfehler:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

62

Das Knotenpolynom:

Ein Term des Interpolationsfehlers ist das **Knotenpolynom**:

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Optimierungsproblem:

Bestimme die Knoten x_0, x_1, \dots, x_n , so dass

$$\max_{x_0, \dots, x_n \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

für $x \in [a, b]$ minimal ist.

Lösung: Tschebyscheff-Knoten auf $[-1, 1]$:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

63

6.3 Spline-Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Definition: (Kubischer Spline)

Eine Funktion $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **kubischer Spline**, falls

- 1) $S \in C^2([a, b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar,
- 2) S ist auf jedem Teilintervall ein Polynom dritten Grades:

$$S(x) = s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ und $j = 1, \dots, n$.

Interpolation der Daten $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ mit kubischen Splines.

64

Ein kubischer Spline besitzt also $4n$ Parameter, die folgendermaßen bestimmt werden:

1) Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}, \quad s_j(x_j) = f_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

2) Stetigkeit der Ableitung:

$$s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

3) Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

Dies sind $(4n - 2)$ Gleichungen, es fehlen also noch zwei Bedingungen.

65

Definition: Ein kubischer Spline heißt

1) **natürlicher Spline**, falls gilt: $S''(a) = S''(b) = 0$,

2) **periodischer Spline**, falls gilt: $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$,

3) **allgemeiner Spline**, falls (z.B.) gilt: $S'(a) = f'_0$, $S'(b) = f'_n$.

Alle drei Bedingungen ergeben die zwei notwendigen Gleichungen.

Besondere Eigenschaft des natürlichen Splines:

Satz: Unter allen interpolierenden C^2 -Funktionen minimiert der **natürliche kubische Spline** das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

Funktional ist ein Maß für die Krümmung der Interpolationsfunktion.

66

Berechnung des natürlichen kubischen Splines:

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$S(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

Dann gilt:

$$a_j = f_{j-1}$$

$$b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6}h_j$$

$$c_j = \frac{M_{j-1}}{2}$$

$$d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

und die **Momente** M_j lösen ein LGS mit Tridiagonalmatrix.

67

Herleitung des Splines über die Momente M_j :

$$M_j := S''(x_j), \quad j = 0, \dots, n$$

nennt man **Momentenmethode**: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \quad (h_j = x_j - x_{j-1})$$

Integration liefert

$$s_j'(x) = B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2$$

$$s_j(x) = A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-1})^3$$

mit den Integrationskonstanten A_j, B_j .

68

Aus

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad s_j(x_j) = f_j$$

folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}) \quad (*)$$

Stetigkeit von S' an den Punkten $x_j, j = 1, \dots, n-1$ ergibt

$$s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j) \Rightarrow B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2}h_j = B_{j+1}$$

Einsetzen von (*) ergibt dann:

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}$$

für $j = 1, \dots, n-1$.

69

Tridiagonalsystem für M_0, \dots, M_n mit $S''(a) = S''(b) = 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$ und

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

für $j = 1, \dots, n-1$ sowie den Randwerten

$$\lambda_0 = 0, \quad d_0 = 0, \quad \mu_n = 0, \quad d_n = 0$$

70

Abschließende Bemerkungen:

- 1) Die Berechnung des (natürlichen) kubischen Splines ist relativ leicht, da das Tridiagonalsystem direkt gelöst werden kann.
- 2) Ein Spline oszilliert weit weniger als klassische Interpolationspolynome, denn er minimiert die Krümmung.
- 3) Nimmt man immer mehr Stützstellen hinzu, so konvergiert der Spline mit der Ordnung h^4 gegen die Ausgangsfunktion.
- 4) Schreibt man als Randbedingungen die ersten Ableitungen vor, d.h.

$$S'(a) = f'_0, \quad S'(b) = f'_n$$

so erhält man ebenfalls ein Tridiagonalsystem, allerdings mit anderen Werten für λ_0, d_0, μ_n und d_n .

- 5) Beim periodischen Spline erhält man bei der Lösung **kein** Tridiagonalsystem.

71

Kapitel 8: Integration

Erläuterung auf Folie

8.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion auf einem (zunächst) kompakten Intervall $[a, b]$.

Definition: 1) Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung (Partition, Unterteilung)** des Intervalls $[a, b]$. Die **Feinheit** der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit \mathcal{Z} bzw. $\mathcal{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

72

Definition: 2) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1})$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung Z ,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z ,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Obersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z .

73

Beobachtung:

Aus den Definitionen folgt direkt:

1) Für **fest**e Zerlegungen gilt stets:

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

2) Ist Z_1 eine **feinere** Zerlegung als Z_2 , i.e. $Z_2 \subset Z_1$, so gilt:

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

3) Für zwei **beliebige** Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

74

Konsequenzen:

1) Es existieren die Grenzwerte über immer feinere Zerlegungen:

$$\int_{\bar{a}}^b f(x)dx := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad \text{(Untegral)}$$

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad \text{(Oberintegral)}$$

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt **(Riemann-) integrierbar** über $[a, b]$, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

nennt man das **(Riemann-) Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.**

75

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist integrierbar:

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

2) Sei $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$:

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

76

Beispiele:

3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 1.$

Also ist die Funktion **nicht** integrierbar.

4) Sei $a \leq c \leq b$ und $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq c \\ 1 & : x = c \end{cases}$$

Die Funktion ist integrierbar mit $\int_a^b f(x) dx = 0$, denn

$$U_f(Z) = 0 \quad 0 < O_f(Z) < 2\|Z\|$$

77

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Dann gelten:

1) f ist integrierbar auf $[a, b] \Leftrightarrow f$ integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$.

Zusätzlich gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

2) **Linearität:** Auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist integrierbar:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3) **Positivität:**

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

78

Satz: (Fortsetzung)

4) Abschätzungen:

$$(b - a) \cdot \inf(f[a, b]) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \cdot \sup(f[a, b])$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \cdot \sup \{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Bei der letzten Abschätzung muß $|f(x)|$ integrierbar sein.

79

Bemerkungen:

- 1) Die erste Aussage gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c .
Man definiert daher

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- 2) Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt stets

$$R_f(Z_m) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

sofern $\|Z_m\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

80

8.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)

Für eine **beschränkte** Funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.
- 2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists Z \in \mathbf{Z}[a, b] : O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$

Satz:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:

- 1) Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ integrierbar.
- 2) Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ integrierbar.

81

Beweis zu 2):

Die Funktion ist stetig auf $[a, b]$, also auch gleichmäßig stetig, da $[a, b]$ kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ passend, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Dann gilt für eine Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$:

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}])(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{b - a} \right) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium ist damit $f(x)$ integrierbar.

82

Satz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gelten:

- 1) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist integrierbar.
- 2) Gilt $g(x) \geq C > 0$, so ist der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ integrierbar.
- 3) Die folgenden Funktionen sind integrierbar:

$$|f|(x) := |f(x)|$$

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ 0 & : f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : f(x) < 0 \end{cases}$$

83

Beweis zu 1): Rückführung auf Riemannsches Kriterium:

Sei $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ eine feste Zerlegung. Dann gilt:

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} = \sum_{j=0}^{n-1} (\sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}]) (x_{j+1} - x_j)$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y} |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty \sup_{x,y} |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} \leq \|f\|_\infty \cdot (O_g - U_g) + \|g\|_\infty \cdot (O_f - U_f)$$

84

Frage: Stetige Funktionen sind integrierbar. Was ist mit

Funktionen mit Unstetigkeitsstellen?

Insbesondere: **stückweise stetige Funktionen**

Satz: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann)–integrierbar, falls die Menge $\text{Unst}(f)$ ihrer Unstetigkeitsstellen eine so genannte **Lebesgue–Nullmenge** ist, d.h., falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists [a_i, b_i]_{i \in \mathbb{N}} : \\ \text{Unst}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

85

8.3 Hauptsatz und Anwendungen

Definition:

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, und gilt: $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$, so heißt

$F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung:

- 1) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- 2) Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.

86

Satz: (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

2) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

87

Beweis: Teil 1): Wir müssen zeigen, dass

$$F'(x) = f(x)$$

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x + h \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq h \wedge t \in [a, b]\} \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

da die Funktion $f(x)$ stetig ist.

88

Beweis: Teil 2): Nach der Bemerkung und Teil 1) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad (C = \text{Konstante})$$

Daraus folgt

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$
$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + C$$

und wir erhalten

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

89

Bemerkungen:

- 1) Teil 1) des Hauptsatzes gilt auch für stückweise stetige Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur

einseitig differenzierbar

und

$$F'(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad F'(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$

- 2) Eine beliebige Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch

das unbestimmte Integral

von $f(x)$ und schreibt

$$F = \int f(x)dx$$

Die Funktion F ist dann nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

90

Beispiele: Wir bezeichnen mit C stets die **Integrationskonstante**:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

91

Beispiele:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int b^x dx = \frac{1}{\ln b}b^x + C \quad (b > 0, x > 0)$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C \quad (x > 0)$$

$$\int \log_b x dx = \frac{x}{\ln b}(\ln x - 1) + C \quad (b > 0, x > 0)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

92

Satz: (Integrationsregeln)

1) Linearität:

Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

2) Partielle Integration:

Sind $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

und für die bestimmten Integrale folgt:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

93

Satz: (Integrationsregeln)

3) Substitutionsregel:

Ist $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t) dt = F(h(t))$$

Bei bestimmten Integralen erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(h(t))h'(t) dt &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx \\ &= F(h(b)) - F(h(a)) \end{aligned}$$

Beweis: 1): Integration ist linearer Operator, 2): Produktregel, 3): Kettenregel.

94

Beispiele:

- 1) Wir berechnen (Linearität):

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3) dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- 2) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= (x - 1)e^x + C\end{aligned}$$

- 3) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

95

Beispiele:

- 4) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx \\ &= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ \Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= -\sin x \cos x + x + C \\ \Rightarrow \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\end{aligned}$$

96

Beispiele:

5) Substitution $x = h(t) = a \cos t$ beim Integral

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt$$

denn

$$dx = -a \sin t dt \quad h(0) = a \quad h(\pi) = -a$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt \\ &= a \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= a(t - \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2} \end{aligned}$$

97

6) Substitution $x = h(t) = t^2, t \geq 0$ beim Integral

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2t dt$$

denn

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t 2t dt \\ &= 2(t - 1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

98

Wichtige Beobachtung:

Nicht jedes Integral lässt sich **explizit** lösen,
d.h. die Stammfunktion ist nicht immer durch elementare Funktionen
darstellbar.

Beispiele:

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{Integralsinus})$$

$$\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{Fehlerfunktion})$$

$$E(x, k) := \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{\pm \frac{1}{2}} dt \quad (\text{Elliptische Integrale})$$

99

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$,
 $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x)$$

Integration liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x)p(x) dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx$$

Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

100

Bemerkung:

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es damit ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$, so folgt

$$\exists \xi \in [a, b] \quad : \quad F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Stammfunktion $F(x)$.

101

Bemerkung: Taylor-Entwicklung mittels **partieller Integration:**

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x (x - t)^0 f'(t) dt \\ &= (x - x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x - t)^1 f''(t) dt \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Restgliedformel nach Lagrange aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}$$

102

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch-Zerlegung

einer rationalen Funktion.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

103

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch-Zerlegung

einer rationalen Funktion.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

104

Erläuterungen:

1) Wir haben angenommen, dass $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

2) Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg p \geq \deg q$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mittels **Polynomdivision**.

3) Bei der verbleibenden rationalen Funktion

$$\frac{p_2(x)}{q_2(x)} = R(x) - p_1(x)$$

besitzt der Nenner $q_2(x)$

- die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j
- die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j
- und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

105

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

Parameter, die berechnet werden müssen

$$\alpha_{jl}, \quad j = 1, \dots, n_1, l = 1, \dots, k_j$$

$$\gamma_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, l = 1, \dots, k_j$$

$$\delta_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, l = 1, \dots, k_j$$

Dies erfolgt über **Koeffizientenvergleich**,

d.h. die rechte Seite wird auf den Hauptnenner gebracht.

106

Beispiel: Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1-x = x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1)$$

Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

107

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es **4 Grundtypen**:

1) **Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^s c_k x^k dx = \sum_{k=0}^s \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

2) **Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & : l=1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & : l=2,3,\dots \end{cases}$$

3) **Inverse Quadrate:**

$$I_l := \int \frac{1}{(t^2+1)^l} dt \quad (l \in \mathbb{N})$$

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{t}{(t^2+1)^{l-1}} \right], \quad l=2,3,\dots$$

108

Zunächst gilt:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t + C$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $l > 1$:

Mittels Substitution:

$$\begin{aligned} \int \frac{2t}{(t^2 + 1)^l} dt &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{l-1}} + C \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} I_{l-1} &= \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{l-1}} dt = \int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^l} dt = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{(t^2 + 1)^l} dt + I_l \\ &= \frac{1}{2(1-l)(t^2 + 1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)} \cdot I_{l-1} + I_l \end{aligned}$$

109

4) Wie Typ 3), aber Zähler linear:

$$\begin{aligned} \int \frac{cx + d}{[(x-a)^2 + b^2]^l} dx &= \frac{c}{2} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]^l} dx \\ &\quad + (d + c \cdot a) \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + b^2]^l} \end{aligned}$$

Erstes Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]^l} dx &= \int \frac{du}{u^l} \\ &= \begin{cases} \ln |(x-a)^2 + b^2| + C & : l = 1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]^l} + C & : l = 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2 + b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^l} \quad \text{mit } t = \frac{x-a}{b}$$

110

Beispiel: Wir betrachten wiederum die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + C$$

Bemerkung: Substitution bei anderen Integralen:

1)

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

2)

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

111

8.5 Uneigentliche Integrale

Integrale über unbeschränkte Bereiche

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

Integrale über unbeschränkte Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x) dx, \quad f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, \quad f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit:

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls sie über jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset D$ integrierbar ist.

Ist $f(x)$ lokal integrierbar, so kann man folgende Grenzwerte betrachten:

$$a \rightarrow \infty \quad b \rightarrow \infty$$

112

Definition: Ist eine Funktion lokal integrierbar, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(x) dx$$

und im Allgemeinen **nicht identisch** mit obigem Integral!

113

Definition: Die Funktion $f(x)$ sei lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ oder (a, b) . Dann definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

114

Beispiel:

1) Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} + C & : \alpha > 1 \\ \ln|x| + C & : \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

2) Folgendes uneigentliche Integral besitzt den Wert 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx$$

115

Satz: (Konvergenzkriterien)Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar.1) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C > a : \forall z_1, z_2 > C : \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

2) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h. das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$.

116

Satz: (Konvergenzkriterien)

3) Majorantenkriterium

$$\forall x : |f(x)| \leq g(x) \wedge \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ konvergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ absolut konvergent}$$

4) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x) \wedge \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ divergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ divergent}$$

117

Beispiele:

1) Das sogenannte Dirichlet-Integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

ist konvergent:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos t}{t} \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

und damit

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{z_1} \rightarrow 0 \quad (z_1 \rightarrow \infty)$$

Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $\pi/2$.

118

Beispiele:

2) Das Exponentialintegral

$$\text{Ei}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (x < 0)$$

ist für alle $x < 0$ absolut konvergent.

3) Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

119

8.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma-Funktion von der letzten Folie

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} f(x, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Zunächst: Parameterabhängige eigentliche Integrale

Sei $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a, b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$$

Fragen:

- 1) Ist die Funktion $F(x)$ **stetig**, wenn $f(x, y)$ stetig ist?
- 2) Ist die Funktion $F(x)$ **differenzierbar**, wenn $f(x, y)$ nach der Variablen x differenzierbar ist?

120

Satz: (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I .

Satz: (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall stetig differenzierbar (mit eventuell einseitigen Ableitungen an den Rändern von I), und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

121

Beispiel:

1)

$$F(x) = \int_1^{\pi} \frac{\sin(tx)}{t} dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^{\pi} \cos(tx) dt$$

2) Die **Bessel-Funktion**:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin(x \sin t - nt) dt$$

Die Bessel-Funktion $J_n(x)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

122

Parameterabhängige **uneigentliche** Integrale:

$$F(x) := \int_a^{\infty} f(x, y) dy$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion von oben

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Definition:

Das Integral $\int_a^{\infty} f(x, y) dy$, $x \in I$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in I : \forall y_1, y_2 \geq C : \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right| < \varepsilon$$

123

Bemerkung: Majorantenkriterium:

$$\forall x \in I : |f(x, y)| \leq g(y) \wedge \int_a^{\infty} g(y) dy \text{ konvergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x, y) dy, \quad x \in I \text{ gleichmäßig konvergent.}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dy$$

konvergiert gleichmäßig (und absolut), falls $f(x, y)$ eine gleichmäßige Majorante besitzt.

124

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig, nach x stetig (partiell) differenzierbar und sind die Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{und} \quad \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßig konvergent, so ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung lässt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen:

$$F'(x) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

Beispiel:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \cdot \ln t dt$$

125

9 Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Rotationskörper

Betrachte einen Funktionsgraphen $y = f(x)$, der um die x -Achse rotiert:
Für die Querschnittsfläche gilt

$$Q(x) = \pi(f(x))^2$$

Damit ergibt sich die Volumenformel:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die gleiche Querschnittsfläche, so sind ihre Volumina gleich.

126

Beispiel: Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

um die x -Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^a \left[b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi a b^2 \end{aligned}$$

Volumen einer Kugel: Für $a = b = r$ ergibt sich

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

127

Oberfläche eines Rotationskörpers:

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Beispiel:

Für die Oberfläche einer Kugel gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{Kugel} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

128

9.2 Kurven und Bogenlänge

Definition:

- 1) Eine stetige Funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **Kurve** im \mathbb{R}^n (auch **Parameterdarstellung einer Kurve**).

$c(a)$ heißt der Anfangspunkt, $c(b)$ der Endpunkt der Kurve c .

Eine Kurve heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$.

- 2) Ist die Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung, d.h., ist jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ von $c = (c_1, \dots, c_n)$ stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine C^1 -**Kurve**.

$c(t)$ heißt **stückweise C^1 -Kurve**, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ gibt, sodass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1 -Funktion ist.

- 3) Eine C^1 -Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\forall t \in [a, b] \quad \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0.$$

129

Beispiele:

- 1) Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im \mathbb{R}^2 .

- 2) Die Kurve

$$c(t) = (rt - a \sin t, r - a \cos t)$$

beschreibt eine **Zykloide**.

Wegen

$$\dot{c}(t) = (r - a \cos t, a \sin t)^T$$

ist die Kurve im Fall $r = a$ an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt!

130

Beispiele:

3) Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \quad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie** mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h .

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die neue Kurve

$$\tilde{c}(\tau) = c(h(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und gleichen Durchlaufsinne wie die Kurve c :

Parameterwechsel oder Umparametrisierung

131

Bemerkung:

- 1) Kurven, die durch Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.
- 2) Im Fall einer C^1 -Kurve werden entsprechend nur C^1 -Parameterwechsel zugelassen.
- 3) Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ lässt sich als eine Kurve auffassen:

$$c(x) := (x, f(x))^T \quad a \leq x \leq b$$

beziwehungsweise

$$c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T \quad 0 \leq t \leq 1$$

132

Bogenlänge einer Kurve

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$:

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine **untere Schranke** für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} L(Z)$$

ist die **Länge der Kurve** c .

133

Satz: Jede C^1 -Kurve ist rektifizierbar und es gilt:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Beweisidee: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = \dot{c}_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

Daraus folgt

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(\tau_{k_j}))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

134

Bogenlänge approximiert durch **Riemansche Summe**:

$$R(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(t_j))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Zeigen nun mit Hilfe gleichmäßiger Stetigkeit von c , dass für $\|Z\| \rightarrow 0$ gilt:

$$|L(Z) - R(Z)| \rightarrow 0$$

Weiter gilt:

$$R(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(t_j))^2}}_{\|\dot{c}(t)\|} \underbrace{(t_{j+1} - t_j)}_{dt} \right)$$

$$\Rightarrow L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

135

Beispiel: Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Man berechnet:

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

$$\|\dot{c}(t)\| = r \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2}$$

$$L(c) = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8r$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1 -Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c \circ h) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = L(c)$$

136

Definition:

1) Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve. Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c .

2) Ist c eine glatte C^1 -Kurve, so ist $S : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ ein C^1 -Parameterwechsel.

Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein C^1 -Parameterwechsel.

Die entsprechende Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**.

137

Bemerkung:

1) Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ein **Einheitsvektor**, i.e. die Parametrisierung ist derart, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.

Gleichzeitig ist $\tilde{c}'(s)$ der **Einheitstangentenvektor**.

2) Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

i.e. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor.

138

Bemerkung:

3) Man bezeichnet den Vektor

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** der Kurve c .

4) Die Funktion $\kappa(s)$ definiert durch

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\|, \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

nennt man die **Krümmung** der Kurve c .

Beispiel: Parametrisierung des Kreises nach der Bogenlänge:

$$\tilde{c}(s) = (\cos s, \sin s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$n(s) = \tilde{c}''(s) = -(\cos s, \sin s)$$

$$\kappa(s) = 1$$

139

Beispiele:

1) Funktionsgraph $y = y(x)$ im \mathbb{R}^2 : $c(x) = (x, y(x))^T$

$$c'(x) = (1, y'(x))^T$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (y'(x))^2}\right)^3}$$

2) **Polarkoordinaten** im \mathbb{R}^2 : $r = r(t), \phi = \phi(t)$

$$c(t) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T, \quad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2} dt$$

140

Beispiele:

3) Herzlinie oder Kardiode in Polarkoordinaten

$$r = a(1 + \cos \phi), \quad a > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Für den Umfang = Bogenlänge gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + a^2(1 + \cos \phi)^2} d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| d\phi = 8a$$

Satz: Für die von einer Kurve im \mathbb{R}^2 überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$$

Beweisidee: Berechne Fläche der Teildreiecke

$$|F_i| = \frac{1}{2} \|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

141

Summation über Teildreiecke:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right) \Delta t_i \end{aligned}$$

Zugehörige **Riemannsche Summe:**

$$R(Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) \Delta t_i$$

Im Grenzwert $\|Z\| \rightarrow 0$ gilt wiederum $|F(Z) - R(Z)| \rightarrow 0$ und man erhält die angegebene Formel.

142

Beispiel: Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten:

$$x = a\phi \cos \phi, \quad y = a\phi \sin \phi, \quad a > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\phi^2} \, d\phi \\ &= \frac{a}{2} \left[\phi \sqrt{1 + \phi^2} + \ln \left(\phi + \sqrt{1 + \phi^2} \right) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &\approx 4.158a \end{aligned}$$

und

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \, d\phi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi^2 \, d\phi \approx 1.292a^2$$

143

9.3 Kurvenintegrale

Definition: Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise C^1 -Kurve.

Dann wird das **Kurvenintegral (Linienintegral) 1. Art von $f(x)$ längs c** definiert durch

$$\int_c f(x) \, ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s) \, ds$$

Satz: Das Kurvenintegral 1. Art ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

144

Beispiel:

- 1) Krummliniger mit Masse belegter Draht:

$$\int_c \rho(x) ds := \int_a^b \rho(c(t)) \|\dot{c}(t)\| dt$$

Gesamtmasse des Drahtes bei inhomogener Belegung $\rho(x)$.

- 2) Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x)x ds}{\int_c \rho(x) ds}$$

- 3) Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x)r^2(x) ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.

145

Kapitel 10: Periodische Funktionen, Fourier-Reihen

10.1 Grundlegende Begriffe

Periodische Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der **Periode** T , falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t + T) = f(t)$$

Hauptresultat dieses Kapitels:

Entwicklung einer periodischen Funktion in eine **Fourier-Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundswingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberswingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \dots$

146

Bemerkungen:

- 1) Ist T eine Periode von $f(t)$, so auch kT , $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
Sind T_1 und T_2 Perioden, so ist auch $k_1T_1 + k_2T_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
Man sagt: Die Menge aller Perioden bildet einen \mathbb{Z} -Modul.
- 2) Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT , $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.
- 3) Sind $f(t)$ und $g(t)$ T -periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$ T -periodisch.
- 4) Ist $f(t)$ T -periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

147

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ lässt sich zu einer T -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Gebräuchlich sind dabei die folgenden Vorgehensweisen:

1) Direkte Fortsetzung:

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \leq t < (k + 1)T$$

2) Gerade Fortsetzung: Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben:

$$f(t) := g(t - kT), \quad \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T$$

wobei g zunächst an der y -Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

3) Ungerade Fortsetzung: Wie bei 2), aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

148

Definition:

1) Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **Fourier-Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**); dabei sei $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$.

2) Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißen **trigonometrische Polynome**.

149

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe:**Formel von Euler**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Damit gilt:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Trigonometrische Polynome:

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier-Reihe:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

150

Umrechnung der Koeffizienten a_k, b_k und γ_k :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right] \\ &= \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{2}a_0 & \gamma_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \gamma_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \\ a_0 &= 2\gamma_0 & a_k &= \gamma_k + \gamma_{-k} & b_k &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \end{aligned}$$

151

Satz:

- 1) Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

- 2) Konvergiert die Fourier-Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f(t)$, so ist diese stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

152

Bemerkung:

1) Reelle Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ T/2 & : k = l \neq 0 \\ T & : k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ T/2 & : k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = 0$$

153

Bemerkung:

2) Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k > 0$$

10.2 Fourier-Reihen

Definition:

1) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ in $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

154

Definition: (Fortsetzung)

2) Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ werden die **Fourier-Koeffizienten von $f(t)$** definiert durch:

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k > 0$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

155

Definition: (Fortsetzung)

3) Die mit den obigen Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier-Reihe** von $f(t)$.

Bei der Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ zu einer T -periodischen Funktion.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T -periodische Funktion.

$$f(t) \text{ gerade} \Rightarrow a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \wedge \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \Rightarrow a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

156

Beispiel: Die Sägezahnfunktion:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt (beachte $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt) dt = \frac{1}{k}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe:

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

157

Beispiel: Die Rechteckschwingung:

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : 0 < t < \pi \\ -1 & : \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe lautet daher:

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

158

Beispiel: Sei $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π -periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Damit ergibt sich als Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos t}{1^2} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} - + \dots$$

159

Rechenregeln für Fourier-Reihen:

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, T -periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

1) Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha \gamma_k + \beta \delta_k) e^{ik\omega t}$$

2) Konjugation

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

3) Zeitumkehr

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

160

Rechenregeln für Fourier-Reihen: (Fortsetzung)

4) Streckung

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t}$$

5) Verschiebung

$$f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\gamma_k e^{ik\omega a}) e^{ik\omega t}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

161

Rechenregeln für Fourier-Reihen: (Fortsetzung)

6) Ableitung

Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt:

$$\begin{aligned} f'(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega \gamma_k) e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega k (b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)) \end{aligned}$$

7) Integration

Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t) dt = 0$, so folgt:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right)$$

162

Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch, stückweise stetig differenzierbar.

Betrachte die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

1) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

2) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung:

Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus.

163

Beispiel: Die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2 \cos t + \dots + 2 \cos(nt) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)} dt = (t - \pi) + 2 \sin t + 2 \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + 2 \frac{\sin(nt)}{n}$$

164

Daraus folgt:

$$R_n(t) = \int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{2 \sin(t/2)} dt$$

$$\underline{\text{p.I.}} \quad \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1} \int_{\pi}^t \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin(\tau/2)} \right)$$

$$\underline{\text{MWS}} \quad \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1 \right)$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1) \sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

165

Satz: (Approximationsgüte)

1) Approximation im quadratischen Mittel

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihen.

Für den Teilraum von $C(\mathbb{R})$ der trigonometrischen Polynome

$$T_n := \text{Spann} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

166

Satz: (Fortsetzung)

1) gilt dann

$$\forall \phi \in T_n : \|f - S_n\| \leq \|f - \phi\|$$

d.h. $S_n(t)$ ist von allen Funktionen aus dem Teilraum T_n die beste Approximation von $f(t)$ im quadratischen Mittel.

2) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Hieraus folgt insbesondere die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

167

Satz: (Fortsetzung)

2) und damit auch (**Riemannsches Lemma**)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|$$

Bemerkung:

Unter geeigneten Bedingungen an $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lassen sich die Koeffizienten γ_k der Fourier-Reihe abschätzen:

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Beispiel: Rechteckschwingung

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null!

168

Bemerkung: Für $n \rightarrow \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, i.e.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Diese Beziehung nennt man die **Parsevalsche Gleichung**.

Beispiel: Wieder Rechteckschwingung

Es gilt

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2$$

und da $a_k = 0, k = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$

169

10.3 Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Numerische Quadratur

170

Kapitel 11: Numerische Quadratur

Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

Berechnung über Stammfunktion nicht möglich: Fehlerfunktion
Numerische Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i) \quad \text{Quadraturformel}$$

1) Knoten

$$x_i \in [a, b], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

2) Gewichte

$$g_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

171

11.1 Newton–Cotes Formeln

Interpolationspolynom für $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$ und integriere

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

172

Trapezregel:

Wähle $n = 1$, $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$$

Berechne die beiden Gewichte g_0 und g_1 :

$$g_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2}$$

$$g_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}$$

Daraus folgt die **Trapezregel**:

$$I[f] \approx I_1[f] = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

173

Simpsonregel:

Wähle $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b+a}{2}$ und $x_2 = b$. Damit berechnet man die Gewichte

$$g_0 = \int_a^b l_0(x) dx = \frac{b-a}{6}$$

$$g_1 = \int_a^b l_1(x) dx = \frac{2}{3}(b-a)$$

$$g_2 = \int_a^b l_2(x) dx = \frac{b-a}{6}$$

Daraus folgt die **Simpsonregel**:

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right)$$

174

3/8–Regel:

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right)$$

Milne–Regel:

$$I_4[f] = \frac{b-a}{90} \left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right) \right. \\ \left. + 32f\left(a + 3\frac{b-a}{4}\right) + 7f(b) \right)$$

Satz:

Die Newton–Cotes–Formel $I_n[f]$ integriert Polynome vom Grad $\leq n$ exakt.

175

Zusammengesetzte Newton–Cotes–Formeln:

Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Verwende auf jedem Teilintervall Quadraturformel der Ordnung n .

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$T(h) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ = h \left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

176

Beispiel: Zusammengesetzte Simpsonregel

$$\begin{aligned} S(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{6} (f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})) \\ &= \frac{h}{6} (f(a) + 4f(a + h/2) + 2f(a + h) + \dots \\ &\quad + 2f(b - h) + 4f(b - h/2) + f(b)) \end{aligned}$$

Quadraturfehler der (zunächst einfachen) Newton–Cotes Formeln:

Abschätzung für den Interpolationsfehler:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

177

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f(x) - p_n(x)) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \end{aligned}$$

Beispiel: Trapezregel

$$\int_a^b \left| \prod_{i=0}^1 (x - x_i) \right| dx = \int_a^b (x - a)(b - x) dx = \frac{(b - a)^3}{6}$$

Wir erhalten also:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_1[f] \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(2)}(\xi)|$$

178

Tabelle der Integrationsfehler:

$$\text{Trapezregel: } \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \|f^{(2)}\|_\infty$$

$$\text{Simpsonregel: } \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\text{3/8-Regel: } \frac{(b-a)^5}{6480} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\text{Milneregeln: } \frac{(b-a)^7}{967680} \cdot \|f^{(6)}\|_\infty$$

Bemerkung:

Man beachte die **vergleichsweise** höhere Genauigkeit der Simpson- und Milneregeln (n gerade!):

$$n = 1 : (b-a)^3, \quad n = 2 : (b-a)^{4 \rightarrow 5}, \quad n = 3 : (b-a)^5, \quad n = 4 : (b-a)^{6 \rightarrow 7}$$

179

Fehlerabschätzungen bei zusammengesetzten Newton-Cotes Formeln

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

Es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \|f^{(2)}\|_\infty$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| &= \left| \sum_j^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - I_1^j[f] \right) \right| \\ &\leq \sum_j^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - I_1^j[f] \right| \end{aligned}$$

180

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| &= \left| \sum_j^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - I_1^j[f] \right) \right| \\ &\leq \sum_j^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - I_1^j[f] \right| \\ &\leq \sum_j^{n-1} \frac{(x_{j+1} - x_j)}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\ &\leq \frac{n}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty \\ &= \frac{h^2}{12} (b - a) \|f^{(2)}\|_\infty \end{aligned}$$

181

Beispiel: Zusammengesetzte Simpsonregel

Es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{2880} (b - a) \|f^{(4)}\|_\infty$$

Satz: (Konvergenz)

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei hinreichend oft stetig differenzierbar. Dann konvergieren die

zusammengesetzten Newton–Cotes Formeln

im Grenzwert $h \rightarrow 0$ gegen das Integral

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

182

11.2 Gauß–Quadratur

Approximiere Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b w(x)f(x) dx$$

durch die Quadratur

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

mit einer speziellen Wahl von Stützstellen x_i .

Gaußsche Quadraturformeln mit

$(n + 1)$ Punkten

integrieren Polynome vom Grad $2n + 1$ exakt

183

11.3 Extrapolation

Berechne Quadratur mittels Trapezregel

$$I[f] \approx T[h_i]$$

für verschiedene $h_i, i = 1, \dots, k$ und interpoliere die Funktion

$$g(y) := T[y]$$

an den Stützstellen $y_i = h_i, i = 1, \dots, k$.

Extrapolation:

Werte des Interpolationspolynom an der Stelle $y = 0$ aus

184