Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$)

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\,dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) \sim \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die `Rechteckschwingung`

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \quad \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \quad \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } k \text{ gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \quad \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right).$$

Noch ein Beispiel.

Betrachte $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit direkter 2π-periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \quad \text{für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos(t)}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} \mp \ldots$$

$\square$

Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T-periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Linearität**:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

- **Konjugation**:

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\gamma_{-k}} e^{ik\omega t}$$

- **Zeitumkehr**:

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- Streckung:

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \qquad \text{für } c > 0$$

- Verschiebung:

$$f(t+a) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t} \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Noch mehr Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- Ableitung: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$
\begin{aligned}
f'(t) \quad &\sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k)e^{ik\omega t} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega)\left[b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)\right]
\end{aligned}
$$

- Integration: Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)\,dt = 0$, so folgt

$$
\int_0^t f(\tau)\,d\tau \sim -\frac{1}{T}\int_0^T \tau f(\tau)\,d\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t)\right]
$$

Konvergenzsatz.

Satz: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T*-periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier-Reihe*

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{für } t \in \mathbb{R}.$$

- *Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise und für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] \qquad \textit{für } t \in \mathbb{R}.$$

- *In allen kompakten Intervallen* $[a, b]$, *in denen* $f(t)$ *stetig ist, ist die Konvergenz der Fourier-Reihe gleichmäßig.*

Bemerkung:

Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus. $\square$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \ldots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}\, dt = (t - \pi) + 2\sin(t) + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
R_n(t) &= \int_\pi^t \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin(t/2)}\,dt \\
&= \frac{-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^t \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right)d\tau \\
&= \frac{-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)}-1\right) \qquad \text{für } \xi \in [\pi, t],
\end{aligned}
$$

und daher

$$
|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}
$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$
|R_n(t)| \to 0 \qquad t \to \infty
$$

$\square$

Approximation im quadratischen Mittel.

Satz: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine* T*-periodische, stückweise stetige Funktion, und seien*

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe von f. *Für den linearen Raum*

$$T_n := \textit{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t) \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) \, dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \qquad \textit{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. S_n *ist* Bestapproximation *an* f *aus* T_n *bezüglich* $\| \cdot \|$.

Beweis: Die Funktionen

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_k(t) = \cos(k\omega t), \quad \psi_k(t) = \sin(k\omega t) \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

bilden eine Orthonormalbasis des linearen Teilraums $T_n \subset C(\mathbb{R})$.

Dann ist die Bestapproximation $s^* \in T_n$ aus T_n an $f \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch die orthogonale Projektion von f auf T_n:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= < f, \varphi_0 > \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{n} [< f, \varphi_k > \varphi_k(t) + < f, \psi_k > \psi_k(t)] \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{n} [a_k \varphi_k(t) + b_k \psi_k(t)] \\ &= S_n(t), \end{aligned}$$

wobei $a_0 = \sqrt{2} < f, \varphi_0 >$, $a_k =< f, \varphi_k >$ und $b_k =< f, \psi_k >$ für $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Die Besselsche Ungleichung.

Satz: *Es gilt die* Besselsche Ungleichung $\|S_n\|^2 \le \|f\|^2$, *d.h.*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] \le \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\le \|f - S_n\|^2 = < f - S_n, f - S_n > = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} < f, S_n > + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} < f, \frac{a_0}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\varphi_k + b_k\psi_k) > + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} \left(< f, \frac{a_0}{2}\varphi_0 > + \sum_{k=1}^{n} [a_k < f, \varphi_k > + b_k < f, \psi_k >] \right) + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2 \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] \right) + \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2
\end{aligned}$$

■

Das Riemannsche Lemma.

Folgerung: *Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das `Riemannsche Lemma`

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

□

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: *Ist eine* T*-periodische Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) stückweise* $(m+1)$*-fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen*

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(m-1)}$$

stetig auf $\mathbb{R}$*, so gibt es eine Konstante* $C > 0$ *mit*

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \qquad \textit{für } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fazit: Je glatter f, desto schneller konvergiert die Fourier-Reihe F_f gegen f.

Beweis: Reicht zu zeigen für $m = 0$. Sei $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar mit Unstetigkeitsstellen

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T.$$

Dann bekommt man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} T \cdot \gamma_k &= \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \\ &= -\frac{1}{ik\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[f(t) e^{-ik\omega t} \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) e^{ik\omega t}\, dt \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &\leq \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[|f(t_{j+1}^-)| + |f(t_j^+)| \right] + \frac{1}{\omega} \int_0^T |f'(t)|\, dt \right] \\ &= \frac{C}{|k|}, \qquad \text{mit } C \equiv C(f). \end{aligned}$$

■

Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung. Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die Parsevalsche Gleichung $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] = \frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, dt,$$

denn die Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2.$$

□

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T-periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\left(f(t^-) + f(t^+)\right) \qquad \text{für alle } t \in [0, T]; \\ g(t) &= \frac{1}{2}\left(g(t^-) + g(t^+)\right) \qquad \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier-Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0; \\ \int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein, d.h. es gilt $f \equiv g$. $\square$