9.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.
Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, so dass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy.$$

Fragen:

- Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
- Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x,y)$ nach x differenzierbar?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x, y)$ *stetig auf* $I \times [a, b]$, *so existiert das Integral*

$$F(x) := \int_a^b f(x, y)\, dy$$

für alle $x \in I$, *und* $F(x)$ *ist stetig auf* I.

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x, y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a, b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a, b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y))\, dy \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)|\, dy < \varepsilon(b - a).$$

Somit ist F stetig in x_0. Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig. ■

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x,y)$ *stetig auf* $I \times [a,b]$ *und nach* x *stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch* $F(x)$ *auf dem Intervall* I *stetig differenzierbar, und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0,x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \lim_{\xi\to x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,dy.$$

Somit ist F differenzierbar in x_0.

Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar. ∎

Zwei Beispiele. Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt.$$

Beispiel 2: Die Bessel-Funktion

$$\begin{aligned} J_n(x) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt)\,dt, \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}, \\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cdot\sin(x\sin(t) - nt)\,dt, \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\cdot\cos(x\sin(t) - nt)\,dt. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bessel-Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Übung (mit partieller Integration). □

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Definition: *Das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \textit{für } x \in I$$

heißt `gleichmäßig konvergent`*, falls es zu* $\varepsilon > 0$ *eine Konstante* $C > a$ *gibt mit*

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in I \textit{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

□

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das Majorantenkriterium, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x,y)$ gibt mit

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty \qquad \text{für alle } x,y \in I.$$

Beweis:

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dy\right| \leq \int_a^\infty |f(x,y)|\,dy \leq \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty.$$

■

Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: *Sei* $f(x, y)$ *stetig und nach* x *stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale*

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y)\,dy \quad \textit{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I *gleichmäßig konvergent. Dann ist* $F(x)$ *stetig differenzierbar, und die Ableitung* $F'(x)$ *von* $F(x)$ *läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt*

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy.$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen. □

Beispiel: Die Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \qquad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \log(t)\,dt.$$

10 Anwendungen der Integralrechnung

10.1 Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi(f(x))^2 \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden **Rotationskörper** die Volumenformel

$$V_{\text{rot}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein. $\square$

Beispiel. Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit } a, b > 0$$

um die x-Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{\text{rot}} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{\text{rot}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$. $\square$

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{\mathrm{rot}} = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

$\square$

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{\mathrm{rot}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

$\square$