Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+2}{k\,(k+1)}$$

konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert s der Reihe an.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion

$$f\,:\,(0,\,10\,] \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x)\,.$$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) **(5 Punkte)**

Mit $a_k := \dfrac{k+2}{k\,(k+1)}$ gilt wegen $k, k+1, k+2 > 0$ offensichtlich $a_k > 0$.

Außerdem gilt $\quad \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k+2}{k^2\,+k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}}{1+\frac{1}{k}} = 0$

und es ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{k+3}{(k+1)\,(k+2)} \cdot \frac{k(k+1)}{k+2} \\ &= \frac{k(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k^2+3k}{k^2+4k+4} < 1\end{aligned}$$

da $0 <$ Zähler $<$ Nenner.

Alternativ

$$\begin{aligned}a_k - a_{k+1} &= \frac{(k+2)^2 - \ k(k+3)}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{k^2+4k+4-k^2-3k}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} > 0\end{aligned}$$

denn Zähler und Nenner sind für alle $k \in \mathbb{N}$ positiv.

Die Folge der a_k ist also positiv und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

Als obere bzw. untere Schranke kann man z. B. s_2 bzw. s_1 wählen:

$$a_1 = \frac{1+2}{1\cdot(1+1)} = \frac{3}{2}, \qquad a_2 = \frac{2+2}{2\cdot(2+1)} = \frac{4}{6}\,.$$

$$s_1 = -a_1 = -\frac{3}{2} < \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k+2}{k\,(k+1)} < s_2 = -a_1+a_2 = -\frac{9}{6}+\frac{4}{6} = -\frac{5}{6}\,.$$

b) **(Kandidaten 2 Punkte, Klassifikation 3 Punkte)**

$f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x)$

$f'(x) = x - 3 + \frac{2}{x} \overset{!}{=} 0 \iff x^2 - 3x + 2 \overset{!}{=} 0\,.$

Quadratische Ergänzung oder $p-q-$ Formel liefert als Kandidaten für die Extrema $x_1 = 1$ und $x_2 = 2\,.$

$f''(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

$f''(1) = 1 - 2 = -1 < 0$. In x_1 liegt ein lokales Maximum vor!

$f''(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$. In x_2 liegt mit $f(2) = -4 + 2\ln(2)$ ein lokales Minimum vor.

Da f' das Vorzeichen zwischen x_2 und $x = 10$ nicht ändern kann, und in x_2 ein Minimum vorliegt, liegt in $x = 10$ ein weiteres Maximum vor:

Es gilt $f(1) = -2.5\,.$

Im Randpunkt $x = 10$ erhält man $f(10) = 50 - 30 + 2\ln(10) > 20\,.$

Also wird das globale Maximum der Funktion im Randpunkt $x = 10$ angenommen.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b aus $\mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{x-a} & : \; x \leq 1\,, \\ x + b & : \; x > 1\,, \end{cases}$$

stetig differenzierbar wird.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \;=\; (x-1) \cdot \cos(x)\,.$$

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 \;=\; 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie Teil b) (i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \;\leq\; 0.1$$

die Abschätzung

$$|\, R_2\,(x)\,| \;:=\; |\, f(x) \;-\; T_2\,(x)\,| \;\leq 10^{-3}$$

gilt.

Lösung 2:

a)

$$f(x) := \begin{cases} e^{x-a} & : \; x \leq 1\,, \\ x + b & : \; x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 1-} e^{x-a} \;=\; e^{1-a}$.

$\lim\limits_{x\to 1+} f'(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 1+} 1 \;=\; 1$. [**1 Punkt**]

Die Funktion kann also nur für $e^{1-a} = 1$ also $\boxed{a = 1}$ stetig differenzierbar sein. [**1 Punkt**]

Da jede differenzierbare Funktion stetig ist, muss aber noch

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) \;=\; e^{1-a} \;=\; 1 \;=\; \lim\limits_{x\to 1+} (1 \;+\; b) = 1 + b$

gelten. Woraus $\boxed{b = 0}$ folgt. [**1 Punkt**]

b) (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\cos(x) & f(0) &= -1 \\ f'(x) &= \cos(x) - (x-1)\sin(x) & f'(0) &= 1 \qquad \textbf{[2 Punkte]} \\ f''(x) &= -\sin(x) - \sin(x) - (x-1)\cos(x) & f''(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_2(x, y) = -1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}.$$

Dieses Ergebnis kann auch durch Einsetzen der Cosinusreihe hergeleitet werden.

(ii) Es gilt

$$f'''(x) = -2\cos(x) - \cos(x) + (x-1)\sin(x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}.$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine Schranke für den Betrag der dritten Ableitung von f für $|\theta| \leq 0.1$.

$$\begin{aligned} |-3\cos(\theta) + (\theta - 1)\sin(\theta)| &\leq |3\cos(\theta)| + |(\theta-1)\sin(\theta)| \leq 3 + |\theta - 1| \\ &\leq 3 + |-0.1 - 1| = 4.1 \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

und

$$|\, R_2\,(x; x_0)\,| \;\leq\; \frac{|f'''(\theta)|}{3!}\,|(x-0)^3| \;<\; \frac{5}{6}\cdot 10^{-3} \;=\; \frac{5}{6000} < \frac{1}{1000}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$