Aufgabe 1: (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+2}{k\,(k+1)}$$

konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert s der Reihe an.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion

$$f : (0,\, 10\,] \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x)\,.$$

Aufgabe 2: (3+7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b aus $\mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{x-a} & : \ x \le 1\,, \\ x + b & : \ x > 1\,, \end{cases}$$

stetig differenzierbar wird.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = (x-1)\cdot\cos(x)\,.$$

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie in Teil b) (i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \le 0.1$$

die Abschätzung

$$|\,R_2\,(x)\,| := |\,f(x) - T_2\,(x)\,| \le 10^{-3}$$

gilt.

Viel Erfolg!