Aufgabe 1. Version A Multiple Choice (4 Punkte).

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] jede Folge konvergiert;
- [ ] jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- [X] jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- [X] jede konvergente Folge ist beschränkt;
- [X] jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

b) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] die harmonische Reihe konvergiert;
- [ ] jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- [ ] jede geometrische Reihe konvergiert;
- [ ] jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- [X] die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

c) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [X] die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- [ ] jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- [ ] jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- [ ] jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- [X] jede differenzierbare Funktion ist stetig.

d) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [X] der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- [X] der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar;
- [X] jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- [X] die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- [ ] die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

Aufgabe 1. Version B Multiple Choice (4 Punkte).

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] die harmonische Reihe konvergiert;
- [ ] jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- [ ] jede geometrische Reihe konvergiert;
- [ ] jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- [X] die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

b) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] jede Folge konvergiert;
- [ ] jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- [X] jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- [X] jede konvergente Folge ist beschränkt;
- [X] jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

c) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [X] der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- [X] der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar;
- [X] jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- [X] die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- [ ] die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

d) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [X] die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- [ ] jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- [ ] jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- [ ] jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- [X] jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Aufgabe 1. Version C Multiple Choice (4 Punkte).

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [x] die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- [ ] jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- [ ] jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- [ ] jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- [x] jede differenzierbare Funktion ist stetig.

b) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [x] der Logarithmus $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- [x] der Logarithmus $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0,\infty)$ differenzierbar;
- [x] jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- [x] die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- [ ] die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

c) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] jede Folge konvergiert;
- [ ] jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- [x] jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- [x] jede konvergente Folge ist beschränkt;
- [x] jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

d) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] die harmonische Reihe konvergiert;
- [ ] jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- [ ] jede geometrische Reihe konvergiert;
- [ ] jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- [x] die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte).

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \left(\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} - \sqrt{n^8 + n^3 - 1} \right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(k+2)}{7^{k-1}}$ auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+3}\right)^{-k}$ auf Konvergenz.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} - \sqrt{n^8 + n^3 - 1} \\ &= \frac{n^8 + 6n^4 - 5 - (n^8 + n^3 - 1)}{\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} + \sqrt{n^8 + n^3 - 1}} = \frac{6n^4 - n^3 - 4}{\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} + \sqrt{n^8 + n^3 - 1}} \\ &= \frac{6 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^4}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n^4} - \frac{5}{n^8}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^8}}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 3.$

b) Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}(k+1+2)}{7^{k+1-1}} \cdot \frac{7^{k-1}}{2^k\,(k+2)} = \frac{2(k+3)}{7(k+2)}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2}{7} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{k}}{1 + \frac{2}{k}} = \frac{2}{7} < 1.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

c) Es gilt $2^k \cdot \left(\frac{k+3}{k}\right)^k > 2^k$. Das notwendige Kriterium für Konvergenz ($\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$) ist verletzt.

Alternativ: $\displaystyle\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{2^k}{\left(\frac{k}{k+3}\right)^k}} = \frac{2}{\frac{k}{k+3}} = 2 \cdot \frac{k+3}{k}$

und damit $\sqrt[k]{|a_k|} > 2 > 1 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$

Die Reihe divergiert nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 3. (2+8 Punkte).

a) Berechnen Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \frac{x^2 + \cos(x)}{\exp(x)},$$

die erste Ableitung $g'(x)$ sowie den Wert von g' an der Stelle $x = 0$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \exp(x) + 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

(ii) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0.1\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{600}$$

gilt.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2 + \cos(x)}{e^x}, \\ g'(x) &= \frac{(2x - \sin(x))e^x - e^x(x^2 + \cos(x))}{e^{2x}}, \\ g'(0) &= \frac{(0 - \sin(0))e^0 - e^0(0 + \cos(0))}{e^0} = \frac{(0 - 1 \cdot (0 + 1))}{1} = -1. \end{aligned}$$

b) (i) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x) + x \cdot \exp(x) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = (x+1) \cdot \exp(x) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ f''(x) &= \exp(x) + (x+1) \cdot \exp(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = (x+2) \cdot \exp(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ f'''(x) &= \exp(x) + (x+2) \cdot \exp(x) + \frac{1}{8} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = (x+3) \cdot \exp(x) + \frac{1}{8} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(ii) (2 Punkte) $f(0) = 3, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.
$T_2(x) = 3 + x + \frac{7}{8} \cdot x^2$.

(iii) (3 Punkte)
Mit einem $\xi \in [-0.1,\, 0.1]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|R_2(x)| &= \frac{1}{3!} \cdot |f'''(\xi)| \cdot |x - 0|^3 \\
&\leq \frac{1}{6000} \cdot \left((0.1 + 3)e^{0.1} + \frac{1}{8} \sin\left(\frac{0.1}{2}\right)\right) \\
&< \frac{1}{6000} \cdot \left((3.1)e^{1} + \frac{1}{8}\right) < \frac{1}{6000} \cdot \left((3.1) \cdot 3 + \frac{1}{8}\right) \\
&< \frac{1}{6000} \cdot (9.3 + 0.5) < \frac{10}{6000} = \frac{1}{600}
\end{aligned}
$$