Aufgabe 1. Multiple Choice (4 Punkte).

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ jede Folge konvergiert;
- ☐ jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- ☐ jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- ☐ jede konvergente Folge ist beschränkt;
- ☐ jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

b) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die harmonische Reihe konvergiert;
- ☐ jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- ☐ jede geometrische Reihe konvergiert;
- ☐ jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- ☐ die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

c) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- ☐ jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- ☐ jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- ☐ jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- ☐ jede differenzierbare Funktion ist stetig.

d) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar;
- ☐ jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- ☐ die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- ☐ die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

Aufgabe 2. (6 Punkte).

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \left(\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} - \sqrt{n^8 + n^3 - 1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(k+2)}{7^{k-1}}$ auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+3}\right)^{-k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3. (2+8 Punkte).

a) Berechnen Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \frac{x^2 + \cos(x)}{\exp(x)},$$

die erste Ableitung $g'(x)$ sowie den Wert von g' an der Stelle $x = 0$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \exp(x) + 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

(ii) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le 0.1\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{600}$$

gilt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Multiple Choice (4 Punkte).

Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die harmonische Reihe konvergiert;
- ☐ jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- ☐ jede geometrische Reihe konvergiert;
- ☐ jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- ☐ die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

b) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ jede Folge konvergiert;
- ☐ jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- ☐ jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- ☐ jede konvergente Folge ist beschränkt;
- ☐ jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

c) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar;
- ☐ jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- ☐ die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- ☐ die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

d) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- ☐ jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- ☐ jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- ☐ jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- ☐ jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Aufgabe 2. (6 Punkte).

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \left(\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} - \sqrt{n^8 + n^3 - 1} \right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(k+2)}{7^{k-1}}$ auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+3}\right)^{-k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3. (2+8 Punkte).

a) Berechnen Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \frac{x^2 + \cos(x)}{\exp(x)},$$

die erste Ableitung $g'(x)$ sowie den Wert von g' an der Stelle $x = 0$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \exp(x) + 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

(ii) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0.1\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{600}$$

gilt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. **Multiple Choice (4 Punkte).**
Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen über stetige Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die Komposition stetiger Funktionen ist stetig;
- ☐ jede stetige Funktion besitzt mindestens eine Nullstelle;
- ☐ jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig;
- ☐ jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- ☐ jede differenzierbare Funktion ist stetig.

b) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine bijektive Funktion;
- ☐ der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $(0, \infty)$ differenzierbar;
- ☐ jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar;
- ☐ die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ beschränkt;
- ☐ die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

c) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ jede Folge konvergiert;
- ☐ jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergiert;
- ☐ jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert;
- ☐ jede konvergente Folge ist beschränkt;
- ☐ jede monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

d) Welche der folgenden Aussagen über Reihen sind sinnvoll und wahr?

- ☐ die harmonische Reihe konvergiert;
- ☐ jede Reihe besitzt einen Grenzwert;
- ☐ jede geometrische Reihe konvergiert;
- ☐ jede konvergente Reihe ist absolut konvergent;
- ☐ die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent; der Grenzwert der Reihe ändert sich dabei nach Umordnung nicht.

Aufgabe 2. (6 Punkte).

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \left(\sqrt{n^8 + 6n^4 - 5} - \sqrt{n^8 + n^3 - 1} \right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(k+2)}{7^{k-1}}$ auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+3}\right)^{-k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3. (2+8 Punkte).

a) Berechnen Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \frac{x^2 + \cos(x)}{\exp(x)},$$

die erste Ableitung $g'(x)$ sowie den Wert von g' an der Stelle $x = 0$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x \cdot \exp(x) + 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

(i) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

(ii) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0.1\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{600}$$

gilt.

Viel Erfolg!