Fachbereich Mathematik **SoSe 2014**
Prof. Dr. A. Iske

Klausur zur Mathematik I

(Modul: Analysis I)

26. August 2014

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	BU	ET	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1. **Multiple Choice (4 Punkte).**
Kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an.

a) Welche der folgenden Aussagen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] 5 ist eine gerade Zahl;
- [ ] 43 ist keine Primzahl;
- [x] $4! = 24$;
- [ ] $2 \cdot 3 = 4$ und $2 \cdot 3 + 3 = 9$;
- [ ] $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

b) Welche Aussagen zu Folgen und Reihen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] jede Folge konvergiert;
- [ ] die harmonische Reihe konvergiert;
- [x] die alternierende harmonische Reihe konvergiert;
- [x] jede konvergente Folge ist beschränkt;
- [ ] die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

c) Welche Aussagen über Gleichungen und Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [ ] die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt eine reelle Lösung;
- [x] $\sqrt{3}$ ist eine Lösung der Gleichung $((3 + x^4)/x^2)^2 = 16$;
- [ ] der Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist monoton und besitzt keine Nullstelle;
- [x] die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$;
- [x] die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind 2π-periodisch.

d) Welche Aussagen über Funktionen sind sinnvoll und wahr?

- [x] die Ableitung eines Polynoms ist ein Polynom;
- [x] die zweite Ableitung eines quadratischen Polynoms ist konstant;
- [ ] jede stetige Funktion ist differenzierbar;
- [x] jede differenzierbare Funktion ist stetig;
- [x] für die Ableitung des Logarithmus gilt $\frac{d}{dx}\log(x) = 1/x$ für $x \in (0, \infty)$.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte).

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{6n^2+7n}{2n+1} - 3n, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$ auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+6}{k^2+2k-2}$ auf Konvergenz.

Hinweis zu c): Finden Sie eine geeignete Majorante bzw. Minorante.

Lösung: (etwa 2+2+2 Punkte)

a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{6n^2+7n}{2n+1} - 3n = \frac{6n^2+7n}{2n+1} - \frac{3n(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{6n^2+7n-6n^2-3n}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2+\frac{1}{n}} = 2\,.$$

b) Mit $a_k := \dfrac{5^k}{(k+1)!}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+1)!}{5^k} = \frac{5}{k+2}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+2} = 0.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

c) Wegen

$$a_k = \frac{3k+6}{k^2+2k-2} > \frac{3k+6}{k^2+2k} = \frac{3(k+2)}{k(k+2)} = \frac{3}{k}.$$

folgt aus der Divergenz der harmonischen Reihe die Divergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+6}{k^2+2k-2}$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+3}$.

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

c) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{500}$$

gilt.

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$$

$$f'(x) = \frac{4x+6-4x+2}{(2x+3)^2} = 8(2x+3)^{-2} \qquad \text{Quotientenregel: 1 Punkt}$$

a)
$$\begin{aligned} f''(x) &= 8(-2)(2)(2x+3)^{-3} \\ &= -32(2x+3)^{-3} \qquad \text{hoffentlich Kettenregel und nicht Quotientenregel: 1 Punkt} \\ f'''(x) &= -32(-3)(2)(2x+3)^{-4} = 32 \cdot 6 \cdot \frac{1}{(2x+3)^4} \qquad \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

b) $f(1) = \dfrac{1}{5}$, $\quad f'(1) = \dfrac{8}{25}$, $\quad f''(1) = -\dfrac{32}{125}$.

$$T_2(x) = \frac{1}{5} + \frac{8}{25}(x-1) - \frac{16}{125} \cdot (x-1)^2. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

c) Mit einem $\xi \in [\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}]$ gilt:

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \frac{1}{3!} \cdot |f'''(\xi)| \cdot |x-1|^3 \qquad \text{Zwischenstelle und } x_0 = 1 \text{ beachten: 1 Punkt} \\ &\leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{32 \cdot 6}{(2\xi+3)^4} \cdot |x-1|^3 \\ &\leq \frac{32}{(2 \cdot \frac{3}{4} + 3)^4} \cdot |x-1|^3 \qquad \text{richtige Zwischenstelle: 1 Punkt} \\ &\leq \frac{32}{(\frac{3}{2}+3)^4} \cdot |\frac{5}{4} - 1|^3 \qquad \text{3/4 bzw. 5/4 für } x \text{ einsetzen: 1 Punkt} \\ &\leq \frac{32}{(\frac{9}{2})^4} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{32 \cdot 2^4}{9^4 \cdot 4^3} \qquad \text{Rechnung: 1 Punkt} \\ &= \frac{2 \cdot 2^4}{81 \cdot 81 \cdot 4} = \frac{8}{81 \cdot 81} < \frac{8}{80 \cdot 81} \\ &= \frac{1}{810} < \frac{1}{500}. \qquad \text{Nachweis der Schranke: 1 Punkt} \end{aligned}$$