Aufgabe 1:

a) Gegeben ist die rekursiv definierte Folge

$$u_1 \;=\; 1\,, \qquad u_{n+1} \;:=\; \sqrt{3u_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge monoton und beschränkt ist, und berechnen Sie den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den/die Grenzwert(e).

$$\textbf{i)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{10^k}\,, \qquad \textbf{ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k-1}}{5^{k-1}}\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

a) Gibt es ein Grenzwert u der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt:

$$u \;=\; \sqrt{3u} \iff u^2 = 3u \iff u \;=\; 0 \,\vee\, u = 3. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für $n = 1$ gilt: $0 \;<\; u_1 \;= 1 \;<\; \sqrt{3} \;=\; u_2\,.$ **[1 Punkt]**

Behauptung : für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \; u_n \; < \; u_{n+1} \; < 3.$

Beweis mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Siehe oben.

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $0 \;<\; u_n \;< u_{n+1} \;< 3\,.$

Induktionsschritt: Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \;<\; 3u_n \;<\; 3u_{n+1} \;< 9 &\iff 0 \;<\; \sqrt{3u_n} \;<\; \sqrt{3u_{n+1}} \;<\; \sqrt{9} \\ &\iff 0 \;<\; u_{n+1} \;<\; u_{n+2} \;< 3\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Die Folge ist somit streng monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent. Da $u_1 = 1$ gilt und die folge monoton wächst, kommt nur

$$\lim_{n\to\infty} u_n \;=\; u \;=\; 3 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

in Frage.

b) **i)** Die Reihe divergiert nach dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \;=\; \frac{(k+2)!}{10^{k+1}} \cdot \frac{10^k}{(k+1)!} \;=\; \frac{k+2}{10}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{10} \;=\; \infty. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

ii) Es handelt sich um die Summe zweier konvergenter geomtrischer Riehen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k-1}}{5^{k-1}} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{5^{k-1}} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k} \\
&= 2\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}\right) + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{10}{3} + \frac{5}{2} = \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

[3 Punkte]

Aufgabe 2)

Gegeben sei $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + \frac{19}{4}\right)$.

a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ die Menge derjenigen reellen Zahlen, für die $f(x) \in \mathbb{R}$ definiert ist. Bestimmen Sie D (maximaler Definitionsbereich).

b) Berechnen Sie alle Nullstellen von f.

c) Berechnen und klassifizieren Sie alle Extrema von f.

d) Fertigen Sie eine (grobe) Skizze von f an.

e) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x; x_0)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) Wegen $p(x) := x^2 - 4x + \frac{19}{4} = (x-2)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es ist also $D = \mathbb{R}$. **[1 Punkt]**

Alternativ: $p-q-$Formel liefert keine reellen Nullstellen des Polynoms $p(x)$. Es ist z.B. $p(0) = \frac{19}{4} > 0$. Also ist $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Nullstellen

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4x + \frac{19}{4}\right) = 0 \iff x^2 - 4x + \frac{19}{4} = 1 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\iff x^2 - 4x + \frac{15}{4} = 0 \iff (x-2)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff x = x_1 = 2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}, \; x = x_2 = 2 + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

c)

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2 - 4x + \frac{19}{4}} = 0 \qquad \textbf{[1 Punkt für die Ableitung]}$$

$$\iff x = x_3 = 2$$

Es gilt: $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_3 \\ > 0 & \text{für } x > x_3 \end{cases}$

also ist f in $]-\infty, x_3]$ streng monoton fallend und in $[x_3, \infty[$ streng monoton wachsend. Also ist x_3 ein strenge globales Minimum. **[1 Punkt]**

Alternative f'' Berechnen. Punkte für die Ableitung: s. unten.

d) [**1 Punkt**]

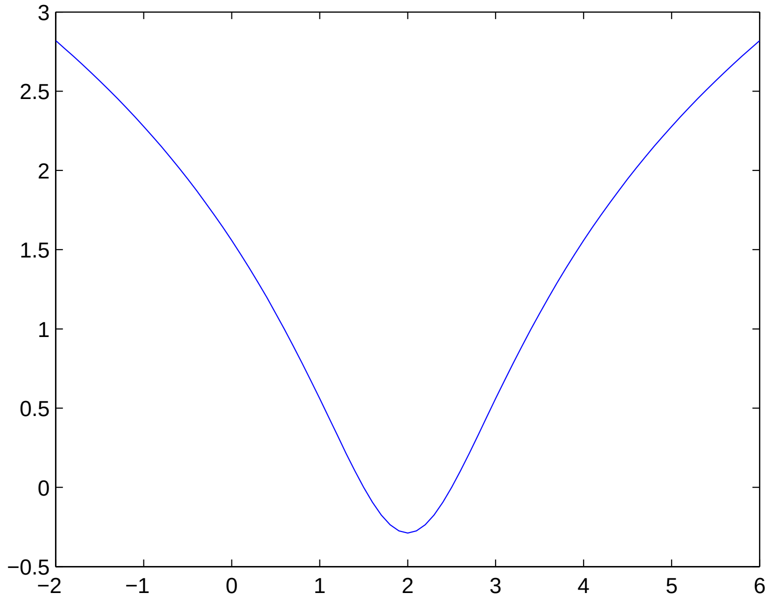

Abbildung 1: Skizze

e)

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 4x + \frac{19}{4}) - (2x-4)(2x-4)}{(x^2 - 4x + \frac{19}{4})^2} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$T_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2} f''(2)(x-2)^2 =$$

$$= \ln(\frac{3}{4}) + 0 \cdot (x-2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{(\frac{3}{4})^2}(x-2)^2 = \ln(\frac{3}{4}) + \frac{4}{3}(x-2)^2 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$