Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

(i) $a_n := \left(\sqrt{n^4 + 8n^2 - 1} - (n^2+2)\right), \qquad n \in \mathbb{N},$

(ii) $b_n := \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\left(\frac{3n^3+5n}{n^2+2} - 5n\right)\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1}$$

konvergiert.

Es sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1}$. Berechnen Sie ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|s - s_n| < 10^{-2}$ gilt.

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die Funktion $f:]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \; f(x) := \frac{-2x}{1+x}$.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x; x_0)$ folgende Abschätzung gilt

$$|R_2(x;0)| := |f(x) - T_2(x;0)| \le \frac{1}{320}, \qquad \forall\, x \in I := [-0.1, \, 0.1].$$

b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^4}.$$