

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

$$\text{a) } \mathbf{x}_n = \left(\frac{3n}{3^n}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{b) } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \frac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2},$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{2^k},$$

$$\text{c) } \frac{4}{6} + \frac{8}{11} + \frac{12}{16} + \frac{16}{21} + \frac{20}{26} + \dots,$$

$$\text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Aufgabe 15:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 2.71\overline{82}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + \sqrt{k}}.$$

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Ab welchem Index n unterscheiden sich die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1 + \sqrt{k}}$ vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

(iii) Wie lauten die ersten beiden Nachkommastellen des Grenzwertes S ?

Aufgabe 16:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = [-1, 2] \cup \left\{ x_n \in \mathbb{R} \mid x_n = \frac{n\pi}{2n-1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$D_2 =]-2, 2[\cup \mathbb{R} \setminus [-3, 3], \quad D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \wedge x \geq 0\}.$$

Man gebe für jede Menge die Menge ihrer Häufungspunkte bzw. inneren Punkte an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie (ggf. uneigentlich) existieren:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1},$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x+1} \right)^2.$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x+y|}{|x|+|y|}.$

Abgabetermin: 3.1. - 7.1.11 (zu Beginn der Übung)