Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+n-2} \right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\cos(x)+2x^2-1}$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+3}{2^k\,(k+1)}$$

konvergiert und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert s der Reihe an.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Unter Anwendung der 3. binomischen Formel erhält man

(i) [**2 Punkte**]

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+n-2} \right) = \frac{(n^2+4n+1)-(n^2+n-2)}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n-2}}$$

$$= \frac{3n+3}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n-2}} = \frac{(3+\frac{3}{n})}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}.$$

Also gilt : $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}.$

(ii) [**2 Punkte**] Die Regel von l'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)+2x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{-\sin(x)+4x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)-(2x)^2\sin(x^2)}{-\cos(x)+4} = \frac{2}{3}.$$

b) [**Nullfolge: 1 Punkt, Monotonie: 2 Punkte, Leibniz 1 Punkt, Schranken: 2 Punkte**]
Alternativ: Quotientenkriterium: 4 Punkte
$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+3}{2^k\,(k+1)}$.

Mit $a_k := \frac{k+3}{2^k\,(k+1)}$ gilt wegen $2^k, k+1, k+3 > 0$ offensichtlich $a_k > 0$.

Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1+\frac{3}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 0$$

und es ist

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= \frac{k+3}{2^k\,(k+1)} - \frac{k+4}{2^{k+1}\,(k+2)} \\ &= \frac{2(k+2)(k+3)-(k+1)(k+4)}{2^{k+1}\,(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+5k+8}{2^{k+1}\,(k+1)(k+2)} > 0 \end{aligned}$$

denn Zähler und Nenner sind für alle $k \in \mathbb{N}$ positiv.

Das heißt, dass die Folge der a_n streng monoton fällt.

Die Folge der a_k ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

Als obere bzw. untere Schranke kann man z. B. s_0 bzw. s_1 wählen:

$$s_1 = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \, \frac{k+3}{2^k\,(k+1)} = 3 - 1 = 2 < \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+3}{2^k\,(k+1)} < s_0 = 3\,.$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} (1+a)e^x & : \ x \leq 0\,, \\ \\ \cos(x) + b & : \ x > 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar wird.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \ = \ (x^2 + 2x - 1)e^{2x} \ .$$

(i) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f .

(ii) Bestimmen Sie alle Extrema von f und klassifizieren Sie die Extrema.

(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades zu f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung 2:

a)

$$f(x) := \begin{cases} (1+a)e^x & : \ x \leq 0\,, \\ \\ \cos(x) + b & : \ x > 0\,. \end{cases}$$

Es gilt einerseits $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) \ = \ 1 + a$

und andererseits $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) \ = \ 1 \ + \ b$.

Die Funktion kann also nur für $\boxed{b = a}$ stetig sein. [**1 Punkt**]

Mit $b = a$ gilt dann

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0-} (1+a)e^x \ = \ 1 + a$

$\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0-} -\sin(x) \ = \ 0$. [**1 Punkt**]

Die Funktion ist also nur für $\boxed{a = b = \ -1}$ stetig differenzierbar.
[**1 Punkt**]

b)

$$f(x) \;=\; (x^2+2x-1)e^{2x}$$

(i) Nullstellen: die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen. Daher gilt:

$$f(x) \;=\; 0 \iff (x^2+2x-1) \;=\; 0 \iff (x+1)^2-2 \;=\; 0$$

$$\iff x_{1,2} \;=\; -1 \pm \sqrt{2} \iff x_1 \;\approx\; -2.4,\; x_2 \;\approx\; 0.4\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(ii) Es gilt

$$f'(x) \;=\; (2x^2+4x-2+2x+2)e^{2x} \;=\; 0 \quad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$\iff 2x^2+6x \;=\; 0 \implies x_3 = 0\,, \quad x_4 = -3 \quad \textbf{[1 Punkt]}\;.$$

Man kann jetzt mit Hilfe der Grenzwerte und z.B. $f(0) = -1$ die Extrema klassifizieren oder über die zweite Ableitung
$f''(x) \;=\; (4x^2+16x+6)e^{2x}$ **[1 Punkt]**

$f''(0) = 6 > 0 \implies$ Minimum in Null. **[1 Punkt]**

$f''(-3) \;=\; (4\cdot 9 - 16\cdot 3 + 6)e^{-6} = -6e^{-6} < 0 \implies$
Maximum für $x = -3$. **[1 Punkt]**

(iii)

$$T_2(x;0) \;=\; f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 \;=\; -1+3x^2. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$