Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_0 \;=\; 1\,, \qquad a_{n+1} \;:=\; \frac{3+5a_n}{20} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \;=\; \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

$$\textbf{i)}\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3\sqrt{k}}\,, \qquad \textbf{ii)}\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k+1}}{k!}\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

a) Gibt es ein Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so muss dieser die folgende Gleichung erfüllen:

$$a \;=\; \frac{3+5a}{20} \iff 20a = 3+5a \iff a = \frac{1}{5}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Behauptung : für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_k \;>\; \frac{1}{5}$.

Beweis mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Für $k = 0$ gilt $a_0 \;=\; 1 > \frac{1}{5}$.

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_n > \frac{1}{5}$.

Induktionsschritt: Dann gilt die Behauptung auch für a_{n+1}. Beweis:

$$\begin{aligned} a_n > \frac{1}{5} &\iff 5a_n > 1 \iff 3+5a_n > 4 \\ &\iff \frac{3+5a_n}{20} = a_{n+1} > \frac{4}{20} = \frac{1}{5}. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Behauptung : für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_k \;>\; a_{k+1}$.

Beweis mittels vollständiger Induktion: *Induktionsanfang:* Für $k = 0$ gilt $a_0 \;=\; 1 > a_1 = \dfrac{3+5}{20}$.

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_{n-1} > a_n$.

Induktionsschritt: Dann gilt die Behauptung auch $a_n > a_{n+1}$. Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n-1} > a_n &\iff 5a_{n-1} > 5a_n \iff 3+5a_{n-1} > 3+5a_n \\ &\iff a_n = \frac{3+5a_{n-1}}{20} > \frac{3+5a_n}{20} = a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie konvergiert gegen den einzig möglichen Grenzwert 1/5. **[2 Punkte]**

b) **i)** Die erste Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriteium:

$$0 < \, a_k < \, \frac{2k}{k^3\sqrt{k}} = \frac{2}{k^2\sqrt{k}} \leq \frac{2}{k^2}\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

ii) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+2}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k+1}} = \frac{\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+2}}{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k+1}} \cdot \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k}} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{k+1}\right)}{\left(1+\frac{2}{k}\right)} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^2}{e^2} \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 \, = \, 0. \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

Aufgabe 2) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x + \cos(x) - 3$.

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $(-2, 0)$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x; 0)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Zeigen Sie, dass für den Restterm R_2 folgende Abschätzung gilt:

$$| R_2(x; 0) | = | f(x) - T_2(x; 0) | \le 10^{-3} \qquad \forall x \in [-0.1, 0.1] .$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) Ableitungen und Werte in Null [**2 Punkte**]

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + e^x + \cos(x) - 3 , & f(0) &= 1 + 1 - 3 = -1, \\ f'(x) &= 2x + e^x - \sin(x) , & f(0) &= 0 + 1 - 0 = 1, \\ f''(x) &= 2 + e^x - \cos(x) \ge e^x + 1 & f''(0) &= 2. \end{aligned}$$

Da f'' keine Nullstellen hat, hat f höchstens zwei Nullstellen (Rolle). [**1 Punkt**]

Es gilt $f(0) < 0$ und

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

Alternativ z.B.

$$f(\pm 2) = 4 + e^{\pm 2} + \cos(\pm 2) - 3 \ge e^{\pm 2} > 0.$$

Es gibt also (ZWS) mindestens zwei Nullstellen.

Insgesamt folgt, dass f genau zwei Nullstellen hat. [**1 Punkt**]

b) Es gilt

$$f'(0) = 0 + e^0 - \sin(0) = 1 > 0$$

und

$f'(-2) = -4 + e^{-2} - \sin(-2) < -4 + 1 + 1 < 0$.

Es gibt also eine Nullstelle x_0 von f' im Intervall $I := [-2, 0]$. Aus Teil a) ist bekannt, dass f' höchstens eine Nulstelle hat. Also gibt es genau eine Nullstelle von f' und diese liegt im Intervall I . [**1 Punkt**]

Es handelt sich um ein Minimum, da f'' überall positiv ist. [**1 Punkt**]

Außerhalb von I kann es kein Extremum mehr geben, da die notwendige Bedingung $f' = 0$ nur in $x_0 \in I$ erfüllt ist. [**1 Punkt**]

c) Nach Teil a) folgt

$$T_2(x;0) \;=\; -1 \,+\, x \,+ x^2\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Wegen $f'''(x) \;=\; e^x + \sin(x)$ gilt mit einem $\theta \,\in\, [-0.1,\, 0.1]$

$$|R_2(x;0)| \;=\; \left|\, \frac{f'''(\theta)}{3!} \cdot |x-0|^3 \,\right| \;\leq\; \frac{|\sin(\theta) + e^\theta|}{6} \cdot |0.1|^3$$

$$\leq\; \frac{1+e^{0.1}}{6} \cdot 10^{-3} \leq \frac{1+e^1}{6} \cdot 10^{-3} \;<\; 10^{-3}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$