Aufgabe 1)

a) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1\,, \qquad a_{n+1} := \frac{3 + 5a_n}{20} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\textbf{i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3\sqrt{k}}\,, \qquad \textbf{ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k+1}}{k!}\,.$$

Aufgabe 2) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x + \cos(x) - 3\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie, dass f genau ein Extremum im Intervall $]-2, 0[$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x;0)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Zeigen Sie, dass für den Restterm R_2 folgende Abschätzung gilt:

$$|\,R_2(x;0)\,| = |\,f(x) - T_2(x;0)\,| \le 10^{-3} \qquad \forall\, x \in [-0.1,\, 0.1]\,.$$