

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Department Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2008/2009

1

Kapitel 1: Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1 Aussagen

Beispiele für Aussagen sind:

- 5 ist eine gerade Zahl
- heute ist Donnerstag
- 16 ist eine Quadratzahl
- heute scheint die Sonne

Kennzeichnende Eigenschaft:

Aussagen sind entweder **wahr** oder **falsch**

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage

$$w(A) = 0 \quad :\Leftrightarrow \quad A \text{ ist falsch}$$

$$w(A) = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad A \text{ ist wahr}$$

2

Verknüpfung von Aussagen:

- $\neg A$: Negation
- $A \wedge B$: Konjunktion
- $A \vee B$: Disjunktion
- $A \Rightarrow B$: Implikation
- $A \Leftrightarrow B$: Äquivalenz

Wahrheitstafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:

Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

$$\text{Also gilt: } A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

3

Tautologien:

Aussagen, die unabhängig von Wahrheitswerten immer wahr sind

Beispiel:

$$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

4

Beispiel:

Man zeige

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Aussageformen: von **Variablen** abhängige Aussagen

Beispiele: Aussagen $A(x)$ (einstellig) oder $A(x, y)$ (zweistellig)

- x ist eine gerade Zahl
- x ist größer als y
- x ist eine Quadratzahl
- $x + y$ ist kleiner 1

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen

Beispiel: Wir definieren eine Aussageform als

$$A(x, y) : \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt zum Beispiel

- $A(1/2, 1)$ ist **wahr**
- $A(-3, 2)$ ist **falsch**

Quantoren \forall , \exists und \exists_1 :

Mathematische Aussagen werden häufig mit Quantoren formuliert.

Sei $A(x)$ eine Aussageform, die von einer Variablen abhängt. Wir definieren drei neue Aussagen, wie oben durch Angabe der Wahrheitswerte:

$$w(\forall x : A(x)) = 1 \Leftrightarrow \text{Für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists x : A(x)) = 1 \Leftrightarrow \text{Es gibt (mindestens) ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists_1 x : A(x)) = 1 \Leftrightarrow \text{Es gibt genau ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

Beispiel: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

((ε, δ) –Definition der Stetigkeit)

7

Negation von Quantoren:

Es gilt

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : (\neg A(x))$$

$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : (\neg A(x))$$

Beispiele:

a) Man verneine die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

b) Negation des Stetigkeitsbegriffes

$$\neg(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

8

Mathematische Sätze und Beweistechniken

Standardform eines Satzes

$$A \Rightarrow B, \quad A, B \text{ Aussagen}$$

A : Voraussetzung (Prämisse) B : Behauptung (Konklusion)

Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n := B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie

9

Satz: Für eine natürliche Zahl n gilt: n gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade.

Beweis:

Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt:

$$n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt:

$$n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade}$$

10

1. Schritt: Direkter Beweis

$$\begin{aligned}n \text{ gerade bedeutet: } \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } n &= 2k \\ \Rightarrow n^2 &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2) \\ \Rightarrow n^2 \text{ ist gerade}\end{aligned}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis (Zeige statt $A \Rightarrow B$ das gilt $\neg B \Rightarrow \neg A$)

$$\begin{aligned}\text{Annahme: } n \text{ ungerade } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n &= 2k - 1 \\ \Rightarrow n^2 &= (2k - 1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ \Rightarrow n^2 \text{ ist ungerade}\end{aligned}$$

11

Satz:

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

mit natürlichen Zahlen n und m darstellen.

12

Beweis: (durch Widerspruch)

Annahme: $\exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$

Wir dürfen annehmen, dass n und m teilerfremd sind (ansonsten teilen wir durch den ggT).

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist also **falsch** $\Rightarrow \sqrt{2}$ ist irrational!

13

1.2 Mengen

Bezeichnungen:

A, B, \dots, M, N, \dots Mengen

$a \in M : \Leftrightarrow a$ ist ein Element der Menge M

$a \notin M : \Leftrightarrow \neg(a \in M)$

Definition von Mengen:

a) Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$

b) Charakterisierende Eigenschaft der Menge,

$$M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$$

Bedeutung der verwendeten Symbole:

$:=$ "wird definiert durch"

$A(x)$ Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

14

Teilmengen von Mengen:

$$M \subset N \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen:

$$M = N \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge: Menge, die kein Element enthält (eindeutig)

Bezeichnung: \emptyset

Ordnungseigenschaft:

$$a) \quad M \subset M$$

$$b) \quad M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$$

$$c) \quad M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$$

15

Verknüpfung von Mengen:

$$M \cup N \quad := \quad \{x \mid x \in M \vee x \in N\} \quad (\text{Vereinigung})$$

$$M \cap N \quad := \quad \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} \quad (\text{Durchschnitt})$$

$$M \setminus N \quad := \quad \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} \quad (\text{Differenz})$$

$$M \times N \quad := \quad \{(a, b) \mid a \in M \wedge b \in N\} \quad (\text{Cartesisches Produkt})$$

$$\mathcal{P}(M) \quad := \quad \{X \mid X \subset M\} \quad (\text{Potenzmenge})$$

16

Bemerkungen:

a) Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N **disjunkt**.

b) Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^n A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ &:= \{a \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{k=1}^n A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\ &:= \{a \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n A_k &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ &:= \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \in A_i\}\end{aligned}$$

17

Bemerkungen:

c) Für geordnete Paare bzw. n -Tupel gilt:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) = (b_1, b_2) &\Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \\ (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i\end{aligned}$$

d) Wichtige Cartesische Produkte:

die **Euklidische Ebene**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der **dreidimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

der **n -dimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

18

Beispiele:

a) Kreisscheibe mit Radius 1

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

b) Streifen

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$$

c) Intervalle in \mathbb{R} : Sei $a \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$ $[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall $(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall $[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall $(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall

19

Beispiele:

d) Querschnitt eines T-Trägers

$$M := M_1 \cup M_2$$

$$M_1 := \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0]$$

$$M_2 := \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]$$

20