

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x).$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x; 0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_n(x; 0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Daraus bekommt man für $0 \leq x \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x; 0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ bekommt man $|R_{10}(x; 0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$. □

Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x; 0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{2n+2}(x; 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \quad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x; 0)| \leq \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \leq \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}.$$

□

Bemerkungen zu Taylor-Reihen.

- Die **Taylor-Reihe**

$$T_{\infty}(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

einer C^{∞} -Funktion f ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.

- Falls die Taylor-Reihe $T_{\infty}(x; x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_{\infty}(x; x_0)$ **nicht notwendigerweise** gegen f .
- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f **reell analytisch**, zum Beispiel:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: Gilt für eine C^{n+1} -Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n -ten Grades.

Beweis: Für das Lagrange-Restglied gilt

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) \equiv T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$



Beispiel: Taylor-Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion f ein Polynom vom Grad n , d.h. f besitzt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit } a_n \neq 0,$$

so ist für einen *beliebigen* Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom $T_n(x; x_0)$ n -ten Grades von f um x_0 gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und es gilt $f \equiv T_n$, d.h. f und T_n sind identisch auf ganz \mathbb{R} .

- Das Taylor-Polynom T_n stellt f in der Polynombasis $\{(x - x_0)^k\}_{k=0}^n$ dar.
- Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$, und somit

$$T_n(x; 0) \equiv f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Auswertung von Polynomen durch Horner-Schema.

Sei p ein Polynom von Grad n mit der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit } a_n \neq 0,$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich p wie folgt darstellen.

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_0)(\dots + (x - x_0)(a_{n-1} + (x - x_0)a_n)\dots))$$

Dann wertet man p *stabil* und *effizient* mit dem **Horner-Algorithmus** aus.

```
y := 0;
for k = n, n-1, ..., 0
  y := a(k) + (x-x0)*y;
end;
```

Beispiel: Für $p(x) = 30(x - 1)^3 + 100(x - 1)^2 + 108(x - 1) + 43$ gilt

$$p(x) = 43 + (x - 1)(108 + (x - 1)(100 + (x - 1)30)).$$

Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 in der Nähe von x^* **quadratisch konvergent**.

Beweis: Betrachte Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - x^*)^2. \quad \blacksquare$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis von (a): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$.

Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 positiv, d.h. es gilt

$$f''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

für ein $\varepsilon > 0$. In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Teil (b) beweist man analog. ■

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

- Der stationäre Punkt x_0 ist ein strenges lokales Extremum.
- Der stationäre Punkt x_0 ist ein **Wendepunkt**.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{2n} -Funktion mit

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f^{(2n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls $f^{(2n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis(idee): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n}, \quad \text{für ein } \xi \in (x_0, x). \quad \square$$

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$.

Es gilt

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2$$

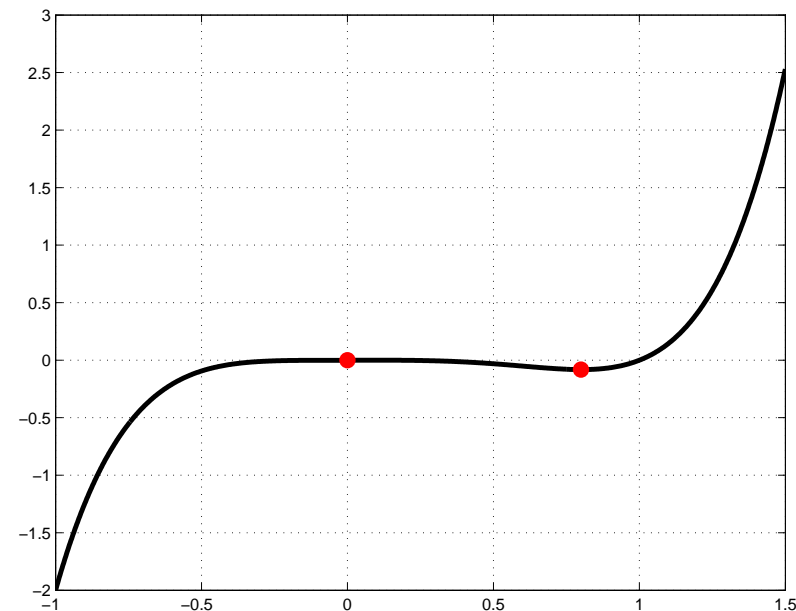
$$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 24$$

Weiterhin

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$$

$$\text{sowie } f^{(4)}(0) = -24.$$



$$f(x) = x^5 - x^4.$$

Somit besitzt f in $x_0 = 0$ ein strenges lokales Maximum.

Weiterhin besitzt f in $x_1 = 4/5$ ein strenges lokales Minimum,
denn es gilt $f'(4/5) = 0$ und $f''(4/5) = 64/25 > 0$. □

Konvexität und Konkavität.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **konvex**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **streng konvex**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) < f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **konkav**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **streng konkav**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

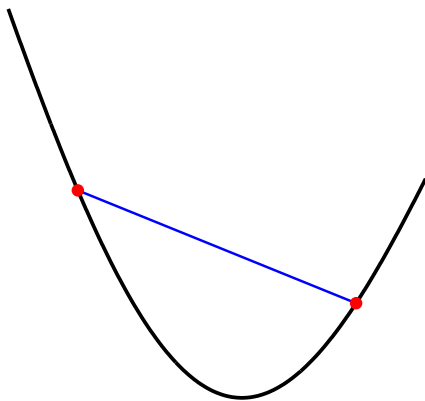
$$f(x) > f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

□

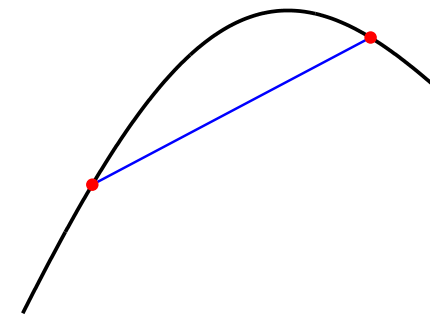
Kriterien für Konvexität und Konkavität.

Satz: Sei f eine C^2 -Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:

- f ist konvex, genau dann wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$;
- f ist konkav, genau dann wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.



f streng konvex (**Linkskurve**)



f streng konkav (**Rechtskurve**)

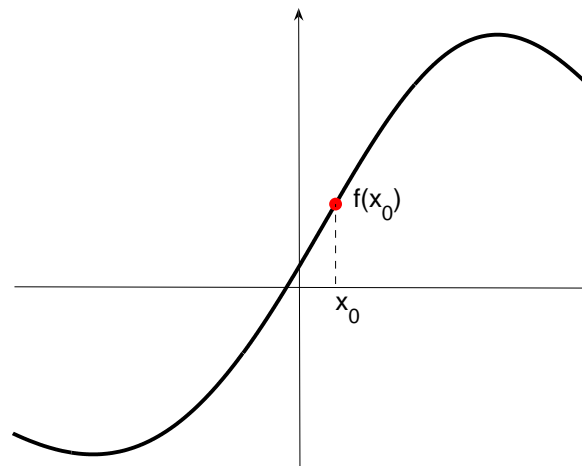
Bemerkung: Für eine C^1 -Funktion f gilt:

- Falls f streng konvex, so liegt der Graph von f oberhalb seiner Tangente.
- Falls f streng konkav, so liegt der Graph von f unterhalb seiner Tangente.

Wendepunkte.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- f ist für ein $\varepsilon > 0$ konvex in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ und konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ (**Links-Rechtskurve**).
- f ist für ein $\varepsilon > 0$ konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ (**Rechts-Linkskurve**).



Links-Rechtskurve in x_0 .

Kriterien für Wendepunkte.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^3 -Funktion.

(a) **Notwendiges Kriterium:**

Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$.

(b) **Hinreichende Kriterien:**

- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$,
so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts-Linkskurve.
- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$,
so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links-Rechtskurve.

Beweis: (a) folgt direkt aus der Stetigkeit von f'' und der Eigenschaft von x_0 .

Zu Teil (b): Aus $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ folgt

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

für ein $\varepsilon > 0$. Somit ist f konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$,
d.h. x_0 ist Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve. Analog die andere Aussage. ■

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$.

Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

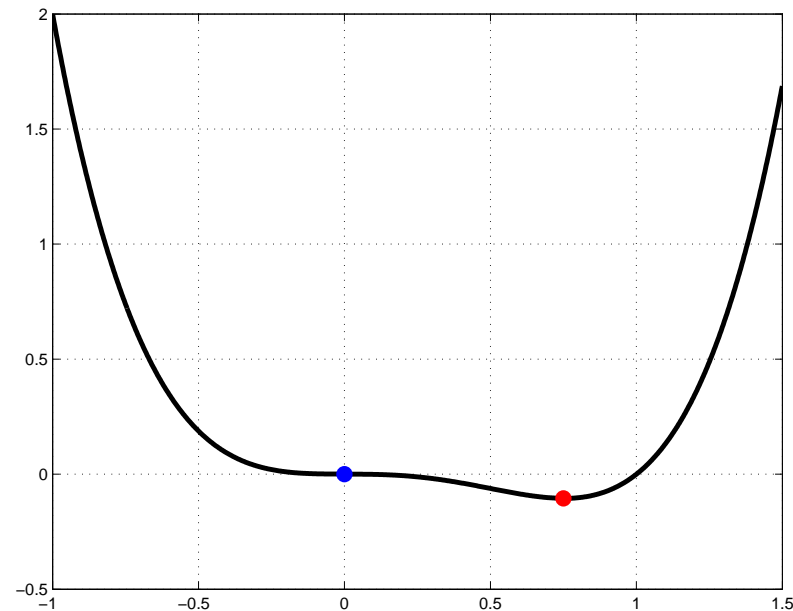
$$f'''(x) = 24x - 6$$

sowie

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -6$$



$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Somit hat f in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links-Rechtskurve). Weiterhin hat f ein lokales Minimum in $x_1 = 3/4$, denn $f'(3/4) = 0$ und $f''(3/4) = 9/4 > 0$. \square

Vordiplom Mathematik I (Modul: Analysis I).

Termin: Freitag, 09. März 2007.

Hilfsmittel:

- Eigene Ausarbeitung auf gelbem Papier von höchstens vier DIN A4 Seiten.
- Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Insbesondere sind elektronische Hilfsmittel nicht zugelassen.

Weitere Bemerkungen:

- Handys sind in Klausuren grundsätzlich verboten.
- Zuwiderhandlungen werden als Täuschungsversuch gewertet.
- Wir bitten um rechtzeitiges Erscheinen mit Studien- und Personalausweis.

Sprechstunde Analysis I:

Donnerstag, 1. März 2007, 14:00-16:00 Uhr, SBS 95, Audimax I.