

### 3.3 Folgen in Vektorräumen

Abschnitt 3.2: Konvergenzkriterien für reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$

Sei nun  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

#### Definition: Konvergenz von Folgen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $V$  (Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$ )

...

3) Eine Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)**  $a \in V$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$$

...

**Beispiel:** (Unendlich–dimensionale) Funktionenräume

88

**Endlich–dimensionale Vektorräume** (zum Beispiel  $\mathbb{R}^n$ )

**Satz:** (Normäquivalenzsatz)

Je zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  sind **äquivalent**, d.h. es gibt positive Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  mit

$$\forall v \in V : C_1 \|v\| \leq \|v\|' \leq C_2 \|v\|$$

Konvergenz und Grenzwert einer Folge sind unabhängig von der Norm.

**Folgerung:** Eine Folge  $(x_m)$  im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn alle  $n$  Koordinatenfolgen  $(x_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

**Beispiel:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n}, 1 + \exp\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 1} \right)^T = \left( 0, 2, \frac{1}{2} \right)^T$$

89

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt daher auch

- das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\exists \mathbf{a} : \mathbf{a}_m \rightarrow \mathbf{a} \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : m, n \geq N : \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- und der **Satz von Bolzano, Weierstraß**

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

**Beispiel:** Für  $a_n := z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$  gegeben, gilt

$$|z| > 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt} \Rightarrow (a_n) \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

90

### 3.4 Konvergenzkriterien für Reihen

**Definition:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine vorgegebene Folge mit  $a_n \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .  
Dann ist  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

eine

#### **Reihe (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ )**

Die Elemente  $s_n$  der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  nennt man auch **Partialsummen**.

Ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , so bezeichnet

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

den **Grenzwert der Reihe**.

91

## Satz: (Konvergenzkriterien für Reihen)

### 1) Cauchysches Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

### 2) Notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

### 3) Linearität

Sind  $\sum a_k, \sum b_k$  konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen  $\sum(a_k + b_k), \sum(\lambda a_k)$ , und es gelten

92

### 3) Linearität (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

### 4) Leibnizsches Kriterium

**Alternierende Reihen** der Form  $\sum (-1)^k a_k, a_k \geq 0$ , für die  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind konvergent, und es gilt die **Einschließung**:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

93

**Beweis zu 4):** Seien

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Dann folgt

$$u_{n+1} = u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n$$

$$v_n = u_n + a_{2n} \geq u_n$$

$$v_n - u_n = a_{2n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Folgen  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  bilden Intervallschachtelung, konvergieren gegen gemeinsamen Grenzwert und

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n$$

94

**Beispiel:** Die **geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$ ,  $q \in \mathbb{C}$  konvergiert für  $|q| < 1$ , denn für die Partialsummen gilt wegen

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1}$$

mit  $x = 1$ ,  $y = q$  und  $m = n + 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}}$$

Für  $|q| > 1$  ist die geometrische Reihe divergent.

95

**Beispiel: Die harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent.

Es gilt

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Damit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

für  $\varepsilon < 1$  verletzt.

96

**Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} =$   
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  ist konvergent.

Dies zeigt man mit Hilfe des Leibnizschen Kriteriums:

Zur Erinnerung: **alternierende Reihen**, deren Folgenglieder eine Nullfolge mit monoton fallenden Beträgen bilden, sind konvergent.

Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314 \dots$$

97

**Definition:** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Beispiel:** Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Es gilt

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

gerade die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert.

98

**Satz: (Kriterien für absolute Konvergenz)**

1)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent  $\Leftrightarrow \left( \sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \geq 0}$  beschränkt

2) **Majorantenkriterium**

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

3) **Quotientenkriterium** Sei  $a_k \neq 0$  ( $\forall k \geq k_0$ )

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

4) **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

99

**Beweis:**

**zu 1):** Die Folge  $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)$  ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

**zu 2):** Da  $|a_k| \leq b_k$  für alle  $k$  gilt, ist  $b_k \geq 0$ . Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist nach Voraussetzung konvergent, wegen  $b_k \geq 0$  aber auch absolut konvergent.

Nach Teil 1) ist die Folge  $\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)$  damit beschränkt. Aus

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

folgt dann, dass die Folge  $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)$  beschränkt und nach Teil 1) absolut konvergent ist.

100

**Beweis:** (Fortsetzung)

**zu 3):** Aus  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$  ( $\forall k \geq k_0$ ) folgt mit vollständiger Induktion direkt

$$|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

und somit für alle  $n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q}}_{\text{Beschränktheitskonstante}} \end{aligned}$$

Nach Teil 1) ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

101

**Beweis:** (Fortsetzung)

**zu 4):** Aus  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$  ( $k \geq k_0$ ) folgt direkt  $|a_k| \leq q^k$  für alle  $k \geq k_0$ . Wie in Teil 3) folgt daraus

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{q^{k_0}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \text{ absolut konvergent}$$

**Bemerkung:**

a) Das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

102

**Beispiel:** Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Die Reihe ist also (absolut) konvergent.

103



**Beispiel:** Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.

Einige Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$