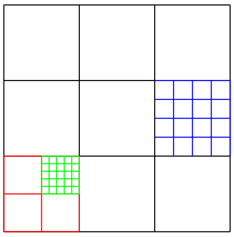
Klassenstufen 9, 10



Beispiel einer Zerlegung in vier Schritten (Zerlegungszahl $n = 51$)

Aufgabe 1 (6+4+4+3+3 Punkte)**.** In dieser Aufgabe geht es zunächst um eine schrittweise Zerlegung eines Einheitsquadrats in kleinere Quadrate:

> In jedem Schritt wird eines der bestehenden Quadrate in *gleichgroße*, kleinere Quadrate zerlegt.

Die Gesamtanzahl der unzerlegten Quadrate bei einer möglichen Zerlegung sei als Zerlegungszahl n bezeichnet.

(a) Gebt eine schrittweise Zerlegung des anfänglichen Einheitsquadrats an, die $n = 13$ ergibt.

(b) Zeigt, dass ab $n = 15$ jede Zerlegungszahl dargestellt werden kann.

(c) Entscheidet, ob für die Zahl 14 eine solche schrittweise Zerlegung existiert (also: Entscheidet, ob 14 eine mögliche Zerlegungszahl ist).

Wir gehen jetzt von der Zerlegung des Einheitsquadrats zur analogen Zerlegung des Einheitswürfels. Hierbei wird ganz analog ein bestehender Teilwürfel in gleichgroße, kleinere Würfel zerlegt.

(d) Bestimmt eine Zerlegung des Ausgangswürfels in 158 kleinere Würfel.

(e) Die kleineren Würfel in einer Zerlegung können ganz unterschiedliche Kantenlängen haben. Mit m sei die kleinste solche Kantenlänge bezeichnet. Ermittelt das größte m für erlaubte Zerlegungen in 343 Würfel.

Aufgabe 2 (6+5+5+4 Punkte). (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 3 (6+6+8 Punkte). (a) Auf die zwölf Kanten eines Würfels werden in irgendeiner Anordnung die Zahlen 1 bis 12 verteilt. Wir identifizieren jetzt die Kante mit ihrer Zahl.

Wir betrachten die Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenlaufen. Begründet, dass diese nicht für alle Ecken übereinstimmen kann, unabhängig davon, wie die Zahlen verteilt wurden.

(b) Nun werden auf die zwölf Kanten, wieder in irgendeiner Anordnung, zwölf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen verteilt (zum Beispiel die Zahlen von 43 bis 54).

Begründet, dass die Anordnung immer noch nicht so sein kann, dass die Eckensummen gleich sind.

(c) Betrachten wir nun ein Tetraeder – das hat weniger Ecken und Kanten. An die vier Ecken werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 verteilt und die Zahlen 5 bis 10 werden an die sechs Kanten verteilt. Als Flächensumme wird die Summe der drei Eckzahlen und der drei Kantenzahlen bezeichnet.

Begründet, dass es keine Verteilung der Kantenzahlen gibt, so dass alle Flächensummen gleich sind.

Aufgabe 4 (3+6+6+5 Punkte)**.** Im Viereck $ABCD$ sei das Dreieck ΔACD rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Weiterhin sei Q der Punkt auf der Geraden AB, für den der Winkel $\angle CQA$ ein rechter ist.

(a) Skizziert ein solches Viereck $ABCD$ so, dass der zugehörige Punkt Q außerhalb der Strecke AB liegt.

(b) Zeigt, dass das Viereck $AQCD$ einen Umkreis hat.

Ab jetzt sei die Gerade AC die Winkelhalbierende vom Winkel $\angle BAD$.

(c) Zeigt, dass $B = Q$ genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck ist.

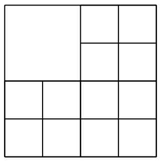
(d) Nun liege B auf der Mittelsenkrechten von A und C. Beweist, dass dann BC parallel zu AD ist.

Hinweise:

- Ein n-Eck hat einen *Umkreis* genau dann, wenn alle n Eckpunkte auf einem Kreis – seinem Umkreis – liegen.
- Ein Drachenviereck ist ein Viereck, dass aus zwei Paaren gleichlanger Seiten besteht, wobei sich jedes dieser Paare jeweils in einem Eckpunkt des Drachenvierecks schneidet.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Eine mögliche Zerlegung in 13 Quadrate erhält man, indem man das Quadrat im ersten Schritt in 4 kleinere zerlegt und in weiteren drei Schritten jeweils eins dieser 4 Quadrate erneut in 4 Quadrate teilt:



(b) Ausgehend vom ursprünglichen Quadrat fällt in einem Zerlegungsschritt immer ein unzerlegtes Quadrat weg, während eine beliebige Quadratzahl an unzerlegten Quadraten hinzukommen. Die Zerlegungszahl steigt also in jedem Schritt um $k^2 - 1$ mit einer beliebigen natürlichen Zahl k, also um 3, 8, 15 usw.

Man erhält so die Zerlegungszahlen $15 = 1 + 8 + 3 + 3$, $16 = 1 + 15$ und $17 = 1+8+8$. Dies sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, also kann man jede gewünschte größere Zerlegungszahl durch entsprechend häufiges Hinzufügen von 3 zu einer dieser Zahlen erreichen.

(c) Die 14 ist nicht darstellbar: Alle Quadratzahlen größer als 9 sind größer als 14, also würde bei einer schrittweisen Zerlegung in 14 Quadrate in jedem Schritt ein Quadrat in 4 oder 9 Quadrate zerlegt werden. Nach einer Zerlegung eines Quadrats in 9 Quadrate hat man 8 unzerlegte Quadrate mehr, also könnte ein solcher Schritt höchstens einmal vorkommen. Daher wäre die Zerlegungszahl entweder von der Form $1 + 8 + 3k = 3(k + 3)$ und somit ein Vielfaches von 3 oder von der Form $3k + 1$, also in jedem Fall von 14 verschieden.

(d) Eine mögliche Zerlegung erhält man, indem man den Würfel im ersten Schritt in 125 Würfel (mit Kantenlänge $\frac{1}{5}$) teilt und in zwei weiteren Schritten jeweils einen Würfel in 27 bzw. 8 Würfel (mit Kantenlänge jeweils $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{2}$ von der Kantenlänge des entsprechenden Würfels): Dabei erhält man $125 + 26 + 7 = 158$ unzerlegte Würfel.

(e) Da $343 = 7^3$ ist, lässt sich der Einheitswürfel in 343 Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{7}$ zerlegen. In jeder Zerlegung des Einheitswürfels in 343 Würfel muss mindestens ein Würfel mindestens das Volumen $\frac{1}{343}$ und somit mindestens die Kantenlänge $\frac{1}{7}$ haben, also ist $\frac{1}{7}$ das größte solche m.

Lösung 2. (a) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung

$$200 = 2^3 \cdot 5^2 \,.$$

Da Primzahlen keine Teiler außer 1 und sich selbst haben, kann jeder Teiler von 200 ungleich 1 nur das Produkt von Primfaktoren von 200 sein. Weiterhin kann kein Teiler einen Primfaktor öfter enthalten als 200 selbst. Somit ergibt sich, dass die folgende Liste eine vollständige Liste aller Teiler von 200 ist:

$$1, \quad 2, \quad 4 = 2^2, \quad 5, \quad 8 = 2^3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 20 = 2^2 \cdot 5, \quad 25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5, \quad 50 = 2 \cdot 5^2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \text{und} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 \,.$$

(b) Wir verallgemeinern die Argumentation aus Teil a. Hierfür ist es praktisch, dass wir uns in Erinnerung rufen, dass für jede Zahl $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$. Genauso wie wir in Teil a argumentiert haben, ist jeder Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ ein Produkt von der Form

$$p^i \cdot q^j \cdot r^k \,,$$

wobei i eine ganze Zahl zwischen 0 und 3, j eine ganze Zahl zwischen 0 und 2, und k entweder 0 oder 1 sein muss. Für $i = j = k = 0$ erhalten wir so z. B. den Teiler 1 und für $i = 3$, $j = 2$ und $k = 1$ die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ selbst. Es gibt also 4 mögliche Werte für i, 3 mögliche Werte für j und 2 mögliche Werte für k. Jede dieser Kombinationen ergibt einen anderen Teiler. Hierfür verwenden wir die im Hinweis angegebene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Insgesamt gibt es also genau

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

verschiedene Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$.

(c) Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteil lässt sich sofort verallgemeinern: Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl immer aus ihrer Primfaktorzerlegung ermitteln, indem man zur Häufigkeit (zum Exponenten) jedes Primfaktors 1 addiert und alle diese Zahlen miteinander multipliziert.

So wissen wir, dass eine Zahl x genau dann 6 Teiler hat, wenn sie entweder nur einen Primfaktor hat, der genau fünfmal vorkommt, d. h. $x = p^5$ für eine Primzahl p, oder wenn x genau zwei Primfaktoren hat, von denen einer einmal und der andere zweimal vorkommt, d. h. $x = p \cdot q^2$. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben, da $6 = 2 \cdot 3$ nur die Teiler 1, 2, 3 und 6 hat und sich als Produkt nur in der Form $1 \cdot 6$ und $2 \cdot 3$ schreiben lässt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p^5$ für eine Primzahl p sind

$$2^5 = 32, \quad 3^5 = 243 \quad \text{und} \quad 5^5 = 3125 \,.$$

Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p \cdot q^2$ erhalten wir für $q = 2$

$$3 \cdot 2^2 = 12, \quad 5 \cdot 2^2 = 20, \quad 7 \cdot 2^2 = 28 \quad \text{und} \quad 11 \cdot 2^2 = 44$$

oder $p = 2$

$$2 \cdot 3^2 = 18, \quad 2 \cdot 5^2 = 50 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 7^2 = 98\,.$$

Die kleinste Zahl $x = p \cdot q^2$ für die weder p noch q gleich 2 ist, ist die $45 = 5 \cdot 3^2$ und bisher haben wir schon fünf kleinere Zahlen mit genau sechs Teilern gefunden (tatsächlich ist 45 nur die siebentkleinste Zahl mit genau sechs Teilern).

Somit sind die fünf kleinsten Zahlen mit sechs Teilern die 12, die 18, die 20, die 28 und die 32.

(d) Wenn a ein Teiler von x ist, dann ist auch x/a ein Teiler von x. Falls x keine Quadratzahl ist, dann können wir die Teiler in Paare $(a, x/a)$ aufteilen, und somit ist die Anzahl der Teiler von x dann gerade. Ist $x = y^2$ hingegen eine Quadratzahl, dann lassen sich alle Teiler bis auf $y = x/y$ in Paare aufteilen und daher ist die Anzahl der Teiler dann ungerade.

Hinweis: Man kann alternativ auch mit der Primfaktorzerlegung argumentieren: Quadratzahlen sind genau die Zahlen, bei denen alle Primfaktoren in gerader Anzahl vorkommen, weshalb es genau bei den Teilern der Quadratzahlen für jeden Primfaktor ungerade viele Möglichkeiten gibt, wie häufig er verwendet wird. Genau Produkte von nur ungeraden Faktoren sind ungerade, weshalb genau die Quadratzahlen insgesamt eine ungerade Anzahl an Teilern haben.

Lösung 3. (a) Addiert man alle acht Summen aus den Kanten, die jeweils an einer Ecke zusammenlaufen, dann kommt jede Kante in der Gesamtsumme zweimal vor. Somit beträgt die Gesamtsumme dann

$$\begin{aligned} &2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) \\ =&2 \cdot ((1+12)+(2+11)+(3+10)+(4+9)+(5+8)+(6+7)) \\ =&2 \cdot 6 \cdot 13 = 156, \end{aligned}$$

sie ist also nicht durch 8 teilbar. Also können die Summen nicht für alle Ecken übereinstimmen.

(b) Die 12 aufeinanderfolgenden Zahlen lassen sich in der Form $k+1, k+2, \dots, k+12$ schreiben, wobei k eine ganze Zahl ist. Die Gesamtsumme der Summen an jeder Ecke beträgt dann

$$\begin{aligned}&2\cdot((k+1)+(k+2)+\cdots+(k+12))\\=&2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12)+2\cdot 12k\\=&156+24k.\end{aligned}$$

Da nur der zweite Summand in der letzten Zeile ein Vielfaches von 8 ist, teilt 8 nicht die Gesamtsumme.

(c) Jede Kante gehört zu zwei Flächen und jede Ecke zu drei Flächen. Daher beträgt die Gesamtflächensumme (Summe der 4 Flächensummen)

$$3\cdot(1+2+3+4)+2\cdot(5+6+7+8+9+10)=120\ .$$

Unter der Annahme dass die Aussage gilt, muss für jede der vier Flächen die Flächensumme $\frac{120}{4}=30$ betragen.

Für die Fläche, die durch die Ecken mit den Eckgewichten 1, 2 und 3 aufgespannt wird, muss die Summe der Kantengewichte

$$30-(1+2+3)=24$$

betragen. Für die Fläche, die durch die Ecken mit den Eckgewichten 2, 3 und 4 aufgespannt wird, muss die Summe der Kantengewichte

$$30-(2+3+4)=21$$

betragen.

Beide genannten Flächen haben genau eine gemeinsame Kante, welche mit c bezeichnet wird. Die verbleibenden werden mit a, b, d und e bezeichnet. Für diese zwei Flächen muss die Gesamtkantensumme $(a+b+2c+d+e)$

$$(30-(1+2+3))+(30-(2+3+4))=24+21=45$$

betragen.

Die Summanden a, b, c, d und e sind paarweise verschieden. Somit lässt sich 45 als Summe von sechs Summanden schreiben, die aus $\{5,6,7,8,9,10\}$ stammen, wobei genau ein Summand (nämlich c) doppelt und genau ein Element (mit f bezeichnet) nicht als Summand auftritt.

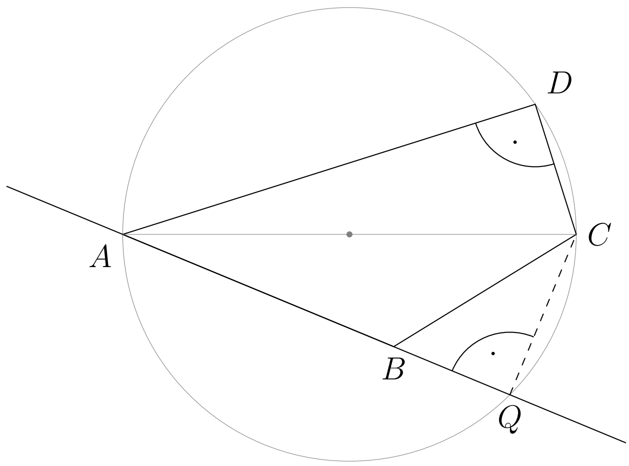
Das heißt

$$45=a+b+2c+d+e=\underbrace{5+6+7+8+9+10}_{=45}+c-f=45+c-f\neq 45$$

da $c\neq f$.

Folglich ist die Annahme falsch, was zeigt, dass es keine Anordnung gibt für die die Flächensumme für jede Fläche gleich ist.

Lösung 4. (a) Die folgende Skizze zeigt ein Beispiel für ein solches Viereck. (Der Thaleskreis von AC ist für die Lösung des nächsten Aufgabenteils grau eingezeichnet.)



(b) Nach der Umkehrung vom Satz des Thales liegen D und Q auf dem Thaleskreis über der Strecke AC, also auf dem Kreis mit Durchmesser AC.

(c) Wenn AC den Winkel $\angle BAD = \angle QAD$ halbiert, ist Q das Spiegelbild von D bei der Spiegelung an der Geraden AC. Also ist dann $AQCD$ ein Drachenviereck. Somit ist $ABCD$ ein Drachenviereck, falls $B = Q$ erfüllt ist.

Andererseits sind die Strecken AB und AD gleich lang, wenn $ABCD$ ein Drachenviereck ist. Da B und Q beide auf der Geraden durch A und B und bezüglich A auf derselben Seite liegen, gilt $B = Q$.

Bemerkung: Wäre BD eine Symmetrieachse, dann läge eine Raute vor, die sogar ein Quadrat wäre.

(d) Spiegelt man A an der Mittelsenkrechten von A und C, so erhält man als Bildpunkt C. Daher ist das Dreieck ABC gleichschenkelig; insbesondere sind die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ACB$ gleich groß. Da die Gerade AC Winkelhalbierende ist, sind auch die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CAD$ gleich groß. Somit sind $\angle ACB$ und $\angle CAD$ Wechselwinkel und die Geraden BC und AD parallel.