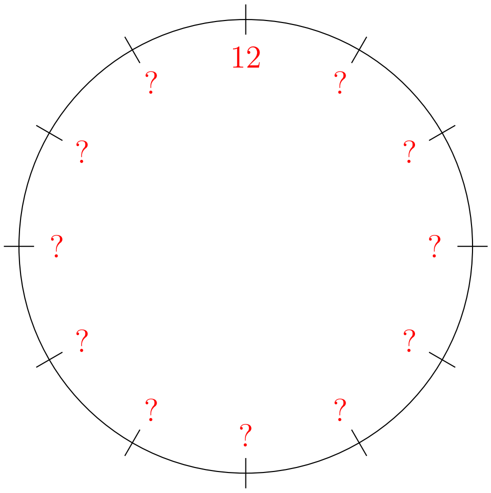
Klassenstufen 7, 8



Aufgabe 1 (5+4+4+5+2 Punkte)**.** Meister Hora hat eine kuriose Uhr: Bei dieser springt der Stundenzeiger nicht wie üblich jede Stunde um 30°, sondern um 150° (im Uhrzeigersinn).

(a) Wie müsste das Ziffernblatt aussehen, wenn man trotzdem die Stunde von „1“ bis „12“ ablesen können soll? (Die „12“ soll immer oben sein.)

(b) Gebt einen anderen Winkel als 30° und 150° an, bei dem auch jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann und bei dem der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist.

(c) Welche anderen Uhren kann es noch geben, bei denen der Stundenzeiger jede Stunde um einen festen Winkel im Uhrzeigersinn springt, so dass jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann und bei denen der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist?

(d) Warum kann es außer den genannten und von euch gefundenen Uhren in den vorangegangenen Aufgabenteilen keine weiteren geben? (Hinweis: Betrachtet Winkel als Brüche, also $30° = \frac{1}{12} \cdot V$, $150° = \frac{5}{12} \cdot V$ usw. mit dem Vollwinkel $V = 360°$.)

(e) Erreicht der Stundenzeiger immer irgendwann wieder die Ausgangsstellung, wenn er jede Stunde um einen beliebigen Bruch multipliziert mit 360° springt? Erklärt kurz eure Antwort.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Beschreibt, was passiert, wenn der Stundenzeiger jede Stunde um einen Winkel springt, der nicht ein beliebiger Bruch multipliziert mit 360° ist. (Solche Zahlen gibt es.)

Aufgabe 2 (4+4+5+5+2 Punkte)**.** In der Musik gibt es Noten mit Notenwerten:

Note	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	...
Notenwert	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

Außerdem kann man noch einen Punkt hinter eine Note setzen. Diese punktierten Noten werden dadurch um die Hälfte ihres Werts verlängert, zum Beispiel hat die Note ♪. den Wert $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$. (Für Kenner: Andere Notenwerte wie Triolen sollen nicht verwendet werden.)

Mehrere Noten bilden einen Takt, zum Beispiel müssen sich in einem $\frac{4}{4}$-Takt die Notenwerte der enthaltenen Noten zu $\frac{4}{4}$ addieren. In einem Rhythmus kommt es auf die Reihenfolge der Noten an. Oben ist ein Beispiel für den Rhythmus eines $\frac{4}{4}$-Takts.

(a) Schreibt alle acht möglichen Rhythmen eines $\frac{4}{4}$-Takts auf, in dem die Nenner der Notenwerte höchstens 4 betragen.

(b) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{2}{4}$-Takten gibt es, in denen die Nenner der Notenwerte höchstens 8 betragen, wenn keine punktierten Noten verwendet werden dürfen?

(c) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{3}{4}$-Takten gibt es, in denen die Nenner der Notenwerte höchstens 8 betragen, wenn keine punktierten Noten verwendet werden dürfen? (Hinweis: Unterscheidet zwischen Rhythmen, die 0, 2, 4 oder 6 Achtelnoten beinhalten.)

In der Musik kann man auch mehrere Noten zusammenfassen, man benutzt dafür Bindebögen, zum Beispiel beträgt bei den verbundenen Noten 𝅗𝅥 ♩ ♪ 𝅘𝅥𝅯 der gesamte Notenwert $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. Dadurch wird die Mathematik einfacher, weil man nun alle Vielfachen des kürzesten Notenwerts bekommen kann. (Nur der Wert entscheidet: 𝅗𝅥 ♩ = 𝅗𝅥. = ♩ 𝅗𝅥)

(d) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{4}{4}$-Takten gibt es, wenn Bindebögen zugelassen sind und der Nenner der Notenwerte höchstens 1 betragen darf? Wie viele ... 2 betragen darf? Wie viele ... 4 betragen darf? Wie viele ... 8 betragen darf?

(e) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{4}{4}$-Takten gibt es jeweils, wenn Bindebögen zugelassen sind und der Nenner der Notenwerte höchstens 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 usw. betragen darf?

Aufgabe 3 (6+5+5+4 Punkte). (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

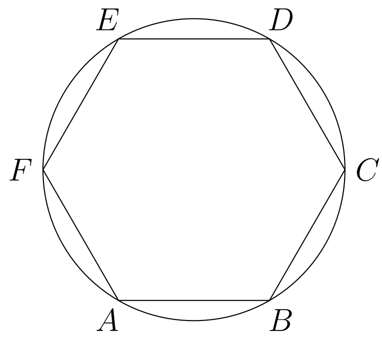
(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 4 (2+2+6+4+2+2+2 Punkte)**.** Es sollen Winkel zwischen verschiedenen Punkten eines regelmäßigen Sechsecks bestimmt werden (jeweils mit Begründung; Messen ist keine Begründung):



Wie groß sind

(a) $\angle AEC$,

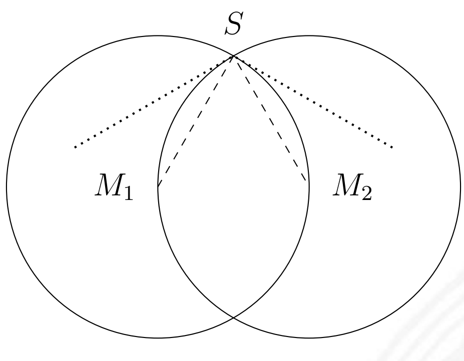
(b) $\angle ADC$,

(c) $\angle AFD$, $\angle DAF$, $\angle FDA$,

(d) $\angle CBA$ und $\angle BAC$?

(e) Gibt es noch andere Winkelgrößen, die kleiner als 180° sind, in Dreiecken bestehend aus Eckpunkten des regelmäßigen Sechsecks? Begründet.

Nun betrachten wir zwei Kreise, die jeweils durch den Mittelpunkt des anderen gehen:

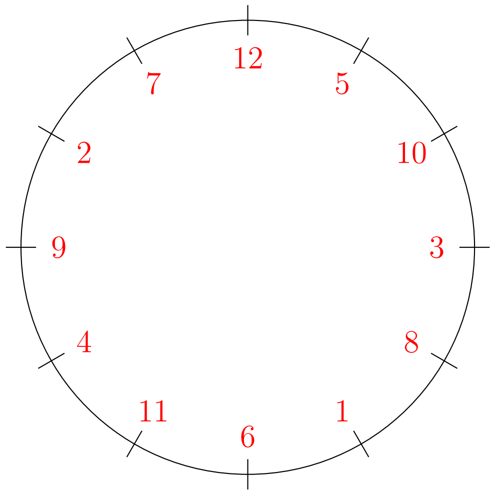


(f) Bestimmt den Winkel bei einem Schnittpunkt S der Kreise zu den beiden Kreismittelpunkten M_1 und M_2: $\angle M_1SM_2$

(g) Bestimmt den Winkel beim Schnittpunkt S zwischen einer Tangente an den ersten Kreis mit einer Tangente an den anderen Kreis.

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Das Ziffernblatt sollte wie folgt aussehen:



(b) Mit dem Winkel 210° kann man das Ziffernblatt aus dem vorherigen Teil an der vertikalen Achse gespiegelt benutzen, da $210° = 360° - 150°$ ist.

(c) Außer den in der Aufgabenstellung genannten Winkeln 30° und 150° sowie 210° aus dem vorangegangenen Aufgabenteil, darf der Winkel nur noch 330° sein, so dass die Uhr genau gespiegelt zur normalen Uhr läuft.

(d) Zum Einen soll die Uhr nach zwölf Stunden wieder in der Ausgangsstellung sein, so dass der Winkel ein Vielfaches von $\frac{1}{12} \cdot 360°$ sein muss. Zum Anderen dürfen unter den Vielfachen $1\cdot$, $2\cdot$, ..., $12\cdot$ der Winkel keine zwei gleichen Winkel sein, sonst könnte man die Zeit nicht eindeutig ablesen. Insbesondere darf nur $12\cdot$ dem Winkel wieder ein Vielfaches von 360° sein. Das ist nicht der Fall, wenn der gekürzte Bruch nicht mehr den Nenner 12 hat:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Ist der Nenner nämlich 2, 3, 4 oder 6, so wird schon nach 2, 3, 4 bzw. 6 Stunden wieder die Ausgangsstellung erreicht. Nur $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ lassen sich nicht mehr kürzen, so dass 30°, 150°, 210° und 330° die einzigen möglichen Winkel sind.

(e) Springt die Uhr jede Stunde um einen beliebigen Bruch multipliziert mit 360°, so erreicht sie immer irgendwann ihre Ausgangsstellung: Spätestens nach so vielen Stunden, wie der Nenner des Bruchs groß ist, hat sie nämlich ein Vielfaches von 360° zurückgelegt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wenn der Stundenzeiger jede Stunde um einen Winkel springt, der nicht ein beliebiger Bruch multipliziert mit 360° ist, zeigt er nie zweimal auf dieselbe Stelle: Hätte er nämlich n Stunden später dieselbe Position erreicht und dabei $z \cdot 360°$ zurückgelegt, müsste er jede Stunde um $\frac{z}{n} \cdot 360°$ gesprungen sein.

Außerdem kommt der Stundenzeiger jedem Punkt auf dem Ziffernblatt beliebig nahe: Da er auf unendlich viele verschiedene Punkte zeigt, gibt es für jeden noch so kleinen Winkel zwei Zahlen auf dem Ziffernblatt, zwischen denen der Winkel noch kleiner ist. Wenn sich aber die Positionen der Zahlen n und $n + k$ nur um den kleinen Winkel α unterscheiden, findet man auch die Positionen der Zahlen $n + 2k$, $n + 3k$ usw. immer jeweils in derselben Richtung um α weiter verschoben auf dem Ziffernblatt. Also gibt es keinen Kreisbogen eines noch so kleinen Winkels auf dem Ziffernblatt, in den der Stundenzeiger nie zeigt.

Der Stundenzeiger trifft also keine Position doppelt, kommt aber in jedem noch so kleinen Bereich vorbei (und zwar unendlich oft). Bei so einer Uhr kann man also nicht nur die Stunde, sondern jedes künftige Datum und die Stunde eindeutig ablesen, und die unendlich vielen Beschriftungen sind gleichmäßig auf dem Rand verteilt.

Lösung 2. (a) | 𝅝 |, | 𝅗𝅥. ♩ |, | 𝅗𝅥 𝅗𝅥 |, | 𝅗𝅥 ♩ ♩ |, | ♩ 𝅗𝅥. |, | ♩ 𝅗𝅥 ♩ |, | ♩ ♩ 𝅗𝅥 |, | ♩ ♩ ♩ ♩ |.

(b) Es gibt sechs verschiedene solche Rhythmen:

| 𝅗𝅥 |, | ♩ ♩ |, | ♩ ♪ ♪ |, | ♪ ♩ ♪ |, | ♪ ♪ ♩ |, | ♪ ♪ ♪ ♪ |.

(Verdoppelt man die Notenwerte, erhält man jeweils genau einen der sechs Rhythmen ohne punktierte Noten aus dem ersten Aufgabenteil.)

Es gibt offensichtlich genau zwei solche Rhythmen ohne Achtel und einen mit vier Achteln. Falls ein solcher Rhythmus zwei Achtel enthält, kann er zusätzlich nur eine Viertelnote enthalten, die die erste, zweite oder dritte Note sein kann. Also gibt es keine weiteren solchen Rhythmen.

(c) Falls ein solcher Takt keine Achtel enthält, kann er entweder eine halbe und eine Viertelnote oder nur Viertelnoten enthalten. Im ersten Fall gibt es zwei Möglichkeiten und im zweiten Fall nur eine, also gibt es drei solche Rhythmen.

Enthält ein solcher Takt genau zwei Achtel, kann der Rest des Takts aus einer halben oder aus zwei Viertelnoten bestehen. Im ersten Fall kann die halbe Note an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Im zweiten Fall gibt es sechs Möglichkeiten, jeweils drei wenn die letzte Note ein Viertel bzw.

ein Achtel ist. (Das andere Viertel bzw. Achtel kann dann jeweils an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen.) Es gibt also neun solche Rhythmen mit genau zwei Achteln.

Falls genau vier Achtel vorkommen, kann der Takt zusätzlich nur ein Viertel enthalten, das jeweils als erste bis fünfte Note gespielt werden kann.

Außerdem gibt es noch den Rhythmus aus genau sechs Achteln.

Damit erhält man insgesamt $3 + 9 + 5 + 1 = 18$ mögliche Rhythmen.

(d) Wenn der Nenner maximal 1 bzw. 2 betragen darf, gibt es einen bzw. zwei mögliche Rhythmen (nur den aus einer ganzen Note oder zusätzlich den aus zwei halben). Aus dem ersten Aufgabenteil ist bekannt, dass es acht mögliche Rhythmen aus Notenwerten mit dem maximalen Nenner 4 gibt, und mit Hilfe der Bindebögen können hier nur Noten gebildet werde, die es auch als normale und als punktierte Noten gab, z. B. ♩♩♩ = ♩𝅗𝅥 = 𝅗𝅥..

Die Anzahl der möglichen Rhythmen mit maximalem Nenner 8 erhält man zum Beispiel durch folgende Überlegung: Man kann jeden dieser Rhythmen als acht Achtel schreiben, von denen einige durch Bindebögen verbunden sind. Zwischen zwei benachbarten Achteln gibt es jeweils zwei Möglichkeiten: Entweder sie werden miteinander verbunden oder es beginnt eine neue Note. Da es sieben Stellen zwischen benachbarten Achteln gibt, erhält man also $2^7 = 128$ verschiedene Möglichkeiten.

(e) Mit der Überlegung aus dem letzten Aufgabenteil ermittelt man 2^{15} Möglichkeiten für den maximalen Nenner 16, 2^{31} Möglichkeiten für den maximalen Nenner 32 und so weiter.

Lösung 3. (a) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung

$$200 = 2^3 \cdot 5^2 .$$

Da Primzahlen keine Teiler außer 1 und sich selbst haben, kann jeder Teiler von 200 ungleich 1 nur das Produkt von Primfaktoren von 200 sein. Weiterhin kann kein Teiler einen Primfaktor öfter enthalten als 200 selbst. Somit ergibt sich, dass die folgende Liste eine vollständige Liste aller Teiler von 200 ist:

$$1, \quad 2, \quad 4 = 2^2, \quad 5, \quad 8 = 2^3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 20 = 2^2 \cdot 5, \quad 25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5, \quad 50 = 2 \cdot 5^2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \text{und} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 .$$

(b) Wir verallgemeinern die Argumentation aus Teil a. Hierfür ist es praktisch, dass wir uns in Erinnerung rufen, dass für jede Zahl $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$.

Genauso wie wir in Teil a argumentiert haben, ist jeder Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ ein Produkt von der Form

$$p^i \cdot q^j \cdot r^k\,,$$

wobei i eine ganze Zahl zwischen 0 und 3, j eine ganze Zahl zwischen 0 und 2, und k entweder 0 oder 1 sein muss. Für $i = j = k = 0$ erhalten wir so z. B. den Teiler 1 und für $i = 3$, $j = 2$ und $k = 1$ die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ selbst. Es gibt also 4 mögliche Werte für i, 3 mögliche Werte für j und 2 mögliche Werte für k. Jede dieser Kombinationen ergibt einen anderen Teiler. Hierfür verwenden wir die im Hinweis angegebene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Insgesamt gibt es also genau

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

verschiedene Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$.

(c) Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteil lässt sich sofort verallgemeinern: Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl immer aus ihrer Primfaktorzerlegung ermitteln, indem man zur Häufigkeit (zum Exponenten) jedes Primfaktors 1 addiert und alle diese Zahlen miteinander multipliziert.

So wissen wir, dass eine Zahl x genau dann 6 Teiler hat, wenn sie entweder nur einen Primfaktor hat, der genau fünfmal vorkommt, d. h. $x = p^5$ für eine Primzahl p, oder wenn x genau zwei Primfaktoren hat, von denen einer einmal und der andere zweimal vorkommt, d. h. $x = p \cdot q^2$. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben, da $6 = 2 \cdot 3$ nur die Teiler 1, 2, 3 und 6 hat und sich als Produkt nur in der Form $1 \cdot 6$ und $2 \cdot 3$ schreiben lässt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p^5$ für eine Primzahl p sind

$$2^5 = 32, \quad 3^5 = 243 \quad \text{und} \quad 5^5 = 3125\,.$$

Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p \cdot q^2$ erhalten wir für $q = 2$

$$3 \cdot 2^2 = 12, \quad 5 \cdot 2^2 = 20, \quad 7 \cdot 2^2 = 28 \quad \text{und} \quad 11 \cdot 2^2 = 44$$

oder $p = 2$

$$2 \cdot 3^2 = 18, \quad 2 \cdot 5^2 = 50 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 7^2 = 98\,.$$

Die kleinste Zahl $x = p \cdot q^2$ für die weder p noch q gleich 2 ist, ist die $45 = 5 \cdot 3^2$ und bisher haben wir schon fünf kleinere Zahlen mit genau sechs Teilern gefunden (tatsächlich ist 45 nur die siebentkleinste Zahl mit genau sechs Teilern).

Somit sind die fünf kleinsten Zahlen mit sechs Teilern die 12, die 18, die 20, die 28 und die 32.

(d) Wenn a ein Teiler von x ist, dann ist auch x/a ein Teiler von x. Falls x keine Quadratzahl ist, dann können wir die Teiler in Paare $(a, x/a)$ aufteilen, und somit ist die Anzahl der Teiler von x dann gerade. Ist $x = y^2$ hingegen eine Quadratzahl, dann lassen sich alle Teiler bis auf $y = x/y$ in Paare aufteilen und daher ist die Anzahl der Teiler dann ungerade.

Hinweis: Man kann alternativ auch mit der Primfaktorzerlegung argumentieren: Quadratzahlen sind genau die Zahlen, bei denen alle Primfaktoren in gerader Anzahl vorkommen, weshalb es genau bei den Teilern der Quadratzahlen für jeden Primfaktor ungerade viele Möglichkeiten gibt, wie häufig er verwendet wird. Genau Produkte von nur ungeraden Faktoren sind ungerade, weshalb genau die Quadratzahlen insgesamt eine ungerade Anzahl an Teilern haben.

Lösung 4. Vorbemerkung: Vermutlich bekannt ist, dass die Innenwinkelsumme im Sechseck $6 \cdot 180° - 360° = 720°$ ist: Um das einzusehen, zerlegt man das Sechseck in 6 Dreiecke, indem man von jedem Eckpunkt die Strecke zum Mittelpunkt M hinzufügt. Die Innenwinkelsumme der Dreiecke zusammen ist dann $6 \cdot 180°$, von denen alle außer dem Vollwinkel um den Mittelpunkt zu Innenwinkeln des Sechsecks gehören. Deshalb müssen noch 360° abgezogen werden. Im regelmäßigen Sechseck ist deshalb jeder Innenwinkel $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$. Am Mittelpunkt M ist jeder Winkel zwischen zwei benachbarten Eckpunkten gleich, also $\frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$. Da die Hälfte jedes Innenwinkels $\frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$ ist, lässt sich das regelmäßige Sechseck also in sechs regelmäßige Dreiecke aufteilen.

(a) $\angle AEC = 60°$, da ΔAEC aus Symmetriegründen ein gleichseitiges Dreieck ist.

(b) $\angle ADC = 60°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Sechsecks ist.

(c) $\angle AFD = 90°$, da F auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser AD liegt. $\angle DAF = 60°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Sechsecks ist. $\angle FDA = 30°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Dreiecks ΔBDF ist. Bemerkung: Natürlich muss man nur zwei dieser Winkel kennen und kann den dritten über die Innenwinkelsumme im Dreieck ΔADF berechnen, insbesondere muss man den Satz des Thales nicht kennen, wenn man die Feststellung aus der Vorbemerkung kennt.

(d) $\angle CBA = 120°$ ist ein Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks. Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck ΔABC erhält man $\angle BAC + \angle ACB = 180° - \angle CBA = 60°$. Aus Symmetriegründen müssen die Winkel aber gleich sein, also ist $\angle BAC = \angle ACB = 30°$.

(e) Da Drehungen und Spiegelungen von bereits untersuchten Dreiecken aus Sechseckpunkten keine neuen Winkel liefern, muss man nur von jeder Art Dreieck eins untersuchen: Drei benachbarte Sechseckpunkte bilden zum Beispiel ΔABC und zwei benachbarte und ein gegenüberliegender ΔADF. Ohne benachbarte Punkte kann man nur jeden zweiten Sechseckpunkt nehmen, also zum Beispiel ΔACE. Dies sind alle Arten von Dreiecken und von jedem wurden in den vorangegangenen Aufgabenteilen alle Innenwinkel bestimmt. Punkte des regelmäßigen Sechsecks können also nur Winkel von 30°, 60°, 90° und 120° bilden.

(f) M_1S und M_1M_2 sind Radien des Kreises um M_1, also gilt $M_1S = M_1M_2$. Genauso gilt $M_1M_2 = M_2S$, da dieses Radien des Kreises um M_2 sind. ΔM_1M_2S ist also ein regelmäßiges Dreieck und $\angle M_1SM_2 = 60°$. Bemerkung: Wenn man das Sechseck aus den vorangegangenen Aufgabenteilen in den Kreis um M_1 einzeichnet, kann man deshalb zum Beispiel $M_2 = C$ und $S = D$ wählen und dann ist $\angle M_1SM_2 = \angle ADC$.

(g) Jeder der Tangenten steht senkrecht auf einem der Radien M_1S oder M_2S. Um den Winkel zwischen den Tangenten auszurechnen, kann man also die beiden rechten Winkel addieren und $\angle M_1SM_2$ abziehen, den man dann doppelt gezählt hat:

$$90° + 90° - \angle M_1SM_2 = 180° - 60° = 120°$$