Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (4+4+4+4+4 Punkte)**.** Zwei Spieler schreiben abwechselnd nach eigener Wahl die Ziffern 0 oder 1 hintereinander. Verloren hat, wer keine Ziffer mehr schreiben kann, ohne dass sich dadurch in der Zahl eine Ziffernfolge der Länge k wiederholt.

Für $k = 3$ hat zum Beispiel beim Spielstand

110111

Spieler 1, der gerade am Zug ist, verloren. Durch das Schreiben einer 1 ergäbe sich die Zeichenfolge $110\overline{1\underline{11}}1$, in der sich die Zeichenfolge 111 wiederholt. Sollte Spieler 1 eine 0 schreiben, dann ergäbe sich die Zeichenfolge $\overline{110}1\underline{110}$, in der sich 110 wiederholt.

(a) Schreibt alle Spielabläufe für $k = 2$ auf. Wie viele Ziffern können maximal hintereinander stehen?

(b) Zeigt, dass für $k = 2$ der zweite Spieler immer gewinnen kann. (Es muss eine Antwort auf jeden möglichen Zug des Gegners zu jeder Zeit benannt werden und natürlich begründet werden, warum man so gewinnt.)

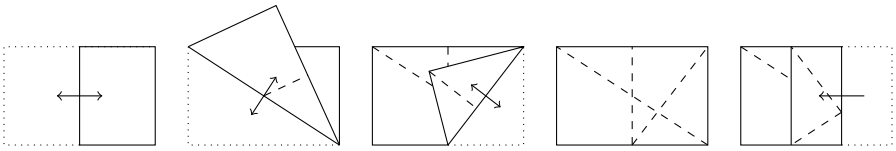
(c) Zeigt, dass das Spiel für jedes mögliche $k \geq 2$ endlich ist (also für jeden Spielablauf endlich viele Züge hat).

(d) Gebt ein längstmögliches Spiel für $k = 3$ an.

(e) Beweist, dass der zweite Spieler bei $k = 3$ immer gewinnen kann, indem er jeweils auf „0“ mit „1“ reagiert und umgekehrt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Findet Gewinnstrategien für weitere k.

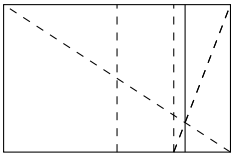
Aufgabe 2 (5+5+3+3+4 Punkte)**.** Karla möchte einen Brief entlang der längeren Seite gedrittelt übereinander falten, damit er in den Umschlag passt. Sie hat kein Lineal zu Hand, kommt aber durch Probieren auf die folgende Faltkonstruktion:



Sie halbiert das Blatt an der langen Seite, indem sie die Ecken aufeinanderlegt, und faltet wieder auf. Dann knickt sie das Blatt einmal entlang einer Diagonalen, faltet wieder auf, knickt danach entlang einer Diagonalen einer Blatthälfte, so dass sich die beiden gefalteten Diagonalen kreuzen, und faltet erneut auf. Anschließend zerteilt Karla die lange Seite mit einer Faltung durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, so dass die Ränder aufeinanderliegen.

(a) Zeigt, dass die letzte Faltung tatsächlich immer genau ein Drittel abtrennt.

(b) Karla probiert weiter und viertelt nun zunächst das Blatt, indem sie eine Blatthälfte erneut in derselben Richtung halbiert. Um die lange Seite zu zerteilen, faltet sie nun durch den Schnittpunkt der großen Diagonalen mit einer Diagonalen eines der äußeren Blattviertel, wieder so, dass die Ränder aufeinanderliegen. (In der folgenden Abbildung sieht man die Linie der letzten Faltung durchgezogen und alle anderen Faltlinien gestrichelt eingezeichnet:)



Welcher Teil des Blattes wird bei der letzten Faltung abgetrennt?

(c) Gebt eine Faltkonstruktion an, mit der man eine Blattseite ohne zu messen in neun gleiche Teile zerlegen kann. Dabei sollen nur Faltungen vorkommen, bei denen die Faltlinie durch zwei (bestimmte) Punkte geht, bei denen ein Punkt auf einen anderen oder eine Gerade (Faltlinie oder Blattkante) auf eine andere gelegt wird oder bei denen die Faltlinie senkrecht zu einer Geraden durch einen Punkt verläuft. Als Teil der Lösung können Blätter mit nach der Reihenfolge nummerierten Faltlinien abgegeben werden.

(d) Gebt eine solche Faltkonstruktion an, die eine Blattseite in sieben gleiche Teile zerlegt.

(e) Beweist, dass man für jede natürliche Zahl n eine solche Faltkonstruktion findet, um eine Seite des Blattes in n gleiche Teile zu teilen.

Aufgabe 3 (6+5+5+4 Punkte)**.** (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 4 (4+3+3+3+2+3+2 Punkte)**.** In verschiedenen Gebieten wird beobachtet, wie sich die Population einer bestimmten Tierart im Laufe der Jahre verändert. Es wird angenommen, dass es eine Funktion f gibt, die für eine Populationsdichte x (Tiere pro m^2) angibt, wie die Populationsdichte $f(x)$ des nächsten Jahres ist. Dieses dynamische System soll nun untersucht werden, ohne dass f wirklich bekannt ist.

(a) Beobachtungen legen nahe, dass f eine Periode der Länge 2 hat: $f(5) = 6$ und $f(6) = 5$.

1. Angenommen f sei ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f(0) = 0$. Bestimmt ein mögliches f. Ist f eindeutig festgelegt?
2. Berechnet für euer im vorherigen Teil bestimmtes f einen weiteren Fixpunkt $f(x) = x$, also eine Populationsdichte, die sich nicht verändert.
3. Die Annahmen aus dem ersten Teil sollen nun nicht mehr gelten. f soll nur noch *stetig* sein (unmathematisch: der Graph der Funktion lässt sich ohne abzusetzen zeichnen), insbesondere soll sie den *Zwischenwertsatz* erfüllen: Jeder Wert zwischen den an zwei Stellen angenommenen Funktionswerten wird auch dazwischen angenommen, also für $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gibt es zu jedem y^* zwischen y_1 und y_2 ein x^* zwischen x_1 und x_2, so dass $f(x^*) = y^*$ gilt.
   Beweist, dass jede stetige Funktionen mit der oben genannten Periode auch immer einen Fixpunkt $f(x) = x$ im Intervall $[5, 6]$ hat.
   Hinweis: Betrachtet die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$.

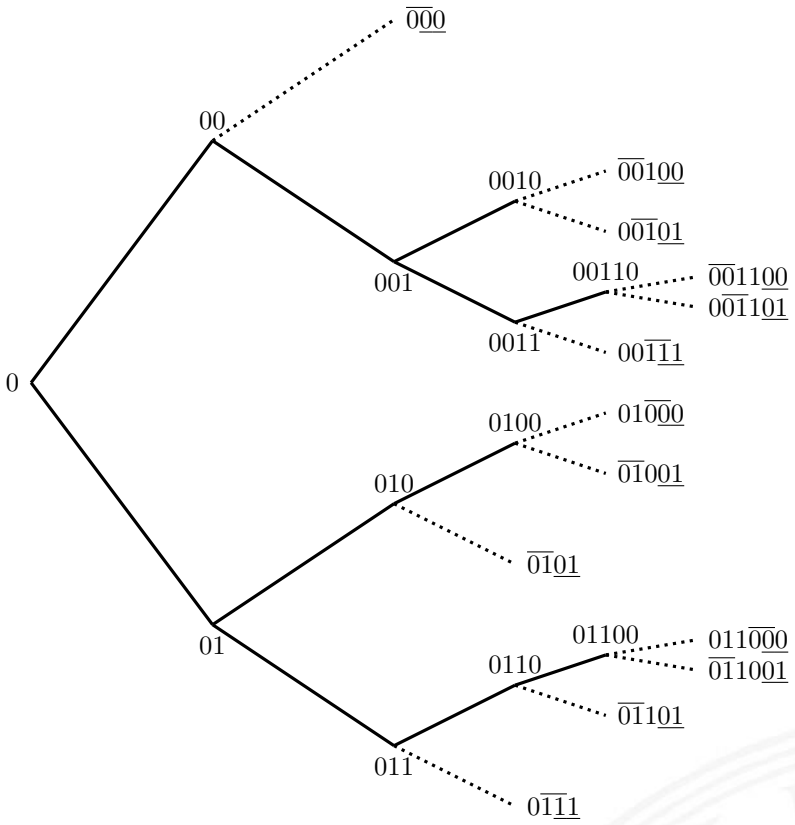
(b) Für eine andere Tierart wird beobachtet, dass f eine Periode der Länge 3 hat: $f(5) = 6$, $f(6) = 7$ und $f(7) = 5$.

1. Angenommen, f sei ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimmt ein mögliches f. (Hinweis: Hier wird nicht $f(0) = 0$ angenommen, es darf Zu- bzw. Abwanderung von Tieren geben.)
2. Beweist, dass jede stetige Funktion f mit der oben genannten Periode der Länge 3 auch einen Fixpunkt $f(x) = x$ hat.
3. Beweist, dass für jede stetige Funktion f mit einer solchen Periode der Länge 3 auch $f \circ f$ eine Periode der Länge 3 hat. (Schreibweise: $f \circ f$ bedeutet, dass f zweimal ausgeführt wird, also $f \circ f(x) = f(f(x))$.)
4. Beweist, dass jede stetige Funktion mit einer solchen Periode der Länge 3 auch eine Periode der Länge 2 hat oder einen weiteren Fixpunkt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Beweist, dass jede stetige Funktion mit einer Periode der Länge 3 auch eine Periode der Länge n hat für jedes $n \in \mathbb{N}$. Bemerkung: Diese Aussage ist ein Teil des berühmten Satzes von Sharkovsky.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Als erstes überlegen wir uns, dass es keine Rolle spielt, ob Spieler 1 mit einer Null oder einer Eins beginnt, und wir listen nur die Spielabläufe auf, die mit einer Null beginnen. Alle anderen Spiele erhält man einfach durch Vertauschen aller Nullen und Einsen. Wir listen die Spielabläufe mit einem Baumdiagramm aus, wobei gepunktete Linien nichterlaubte Züge darstellen, da sie zu wiederholten Teilziffernfolgen führen. Ein Spiel endet also in dem Baumdiagramm genau dann, wenn von dem entsprechenden Spielstand zwei gepunktete Linien ausgehen.



Es gibt also vier Spiele, die damit beginnen, dass Spieler 1 eine Null schreibt, nämlich

$$0010, \quad 00110, \quad 0100 \quad \text{und} \quad 01100\,.$$

Insgesamt gibt es also acht verschiedene Spielabläufe. Die längsten Spiele bestehen aus fünf gültigen Zügen (00110, 01100, 11001 und 10011).

(b) Aus dem Baumdiagramm kann man eine solche Strategie ablesen und es lässt sich folgende Strategie für Spieler 2 formulieren:

> Schreibe immer die Ziffer, die Spieler 1 im ersten Zug gewählt hat.

Beginnt Spieler 1 mit Null, dann schreibt Spieler 2 der Strategie folgend auch eine Eins. Danach kann Spieler 1 nur eine Eins schreiben (siehe Baumdiagramm) und Spieler 2 schreibt wieder eine Null. Dies ergibt die Ziffernfolge 0010, die sich nicht mehr erweitern lässt, und demnach hat Spieler 2 gewonnen. Sollte Spieler 1 mit einer Eins beginnen, dann ergibt sich der gleiche Spielablauf mit Nullen und Einsen vertauscht und endet mit 1101.

(c) Es reicht die Feststellung, dass es nur endlich viele Folgen der Länge k gibt und es somit keine unendliche Folge gibt, in der sich keine Folge der Länge k wiederholt. Man kann aber genauer Abschätzen, wie lang ein Spiel maximal sein darf.

Eine Ziffernfolge mit ℓ Ziffern enthält genau $\ell-(k-1)$ Teilfolgen bestehend aus k Ziffern. Die erste Ziffernfolge der Länge k entsteht also beim k-ten Zug, die zweite beim $(k+1)$-ten usw. Auf der anderen Seite gibt es nur 2^k verschiedene Ziffernfolgen der Länge k, die ausschließlich aus Nullen und Einsen bestehen. Wenn in einem Spiel also $\ell = 2^k + k - 1$ Züge gemacht wurden, dann wurden $\ell-(k-1) = 2^k$ Ziffernfolgen der Länge k erzeugt und da es mehr nicht gibt, muss spätestens bei der nächsten Ziffer eine Wiederholung auftreten. Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $k \geq 2$ ein Spiel aus maximal $2^k + k - 1$ Zügen besteht.

Für $k = 2$ ergibt die Formel eine Spiellänge von maximal fünf Zügen und in Teil a hatten wir vier solche Spiele angegeben.

(d) In Teil c wurde gezeigt, dass ein Spiel für $k = 3$ maximal aus $2^3 + 3 - 1 = 10$ Zügen bestehen kann. Somit reicht es, ein Spiel dieser Länge anzugeben. Insgesamt gibt es 16 solche Spiele:

0001011100,	0100011101,	1000101110,	1100010111,
0001110100,	0101110001,	1000111010,	1101000111,
0010111000,	0111000101,	1010001110,	1110001011,
0011101000,	0111010001,	1011100010,	1110100011.

(e) Angenommen die vorgeschlagene Strategie führt nicht immer zu einem Sieg von Spieler 2. Dann muss es einen Spielablauf geben, so dass die Strategie von Spieler 2 zu einem nicht erlaubten Zug führt. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass Spieler 1 zuvor eine Eins gespielt hat und Spieler 2 nun Null

spielen will, aber nicht darf. Mit x bezeichnen wir den vorletzten Zug von Spieler 2. Über den Wert von x können wir erst mal keine Aussage treffen, es kann Null sein oder auch Eins.

Das Scheitern der Strategie von Spieler 2 heisst, dass irgendwo in dem Spielablauf die Folge $x10$ schon einmal vorkam. Wir unterscheiden zwei Fälle, abhängig davon, wer damals das x gespielt hat.

Falls Spieler 2 damals das x hingeschrieben hat, dann hatte davor Spieler 1 gezogen und y hingeschrieben, wobei y das „Umgekehrte“ von x sein muss. (Also entweder ist $x = 1$ und $y = 0$ oder $x = 0$ und $y = 1$.) Am Spielende hatte aber Spieler 2 auch das x hingeschrieben und mit der gleichen Begründung hatte Spieler 1 davor auch y gespielt. Somit hat sich die Folge $yx1$ schon beim letzten Zug von Spieler 1 wiederholt und dieser hätte bereits verloren.

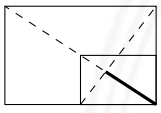
Es bleibt noch der Fall zu betrachten, in dem Spieler 1 beim ersten Aufschreiben der Folge $x10$ das x gespielt hat. In diesem Fall hat Spieler 2 damals danach eine Eins aufgeschrieben, also muss $x = 0$ gelten. Des Weiteren hat dann auch Spieler 1 die Null am Ende von $x10$ hingeschrieben und Spieler 2 antwortete darauf mit einer Eins. Es wurde damals also die Teilfolge

$$0101$$

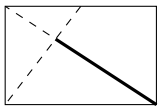
gespielt (wobei die erste Null dem x entspricht). Am Ende des Spiels hat dann Spieler 2 das x gespielt, was, wie wir eben festgestellt haben, eine Null gewesen sein muss. Somit muss Spieler 1 zuvor eine Eins gespielt haben und an dem Punkt, an dem Spieler 2 nicht mehr ziehen kann, steht 101 (wobei die Null dem x entspricht). Die Teilfolge 101 erschien aber bereits zuvor (in $0\underline{101}$) und somit hätte Spieler 1 bereits verloren.

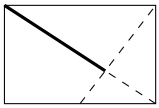
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Für $k = 4$ gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 1. Die ist allerdings nicht so einfach hinschreibbar wie die Strategien für $k = 2$ und $k = 3$. Für ungerades k funktioniert immer die Strategie von Aufgabenteil e und der angegebene Beweis lässt sich dafür verallgemeinern. Für gerade $k \geq 6$ ist keine Gewinnstrategie bekannt.

Lösung 2. (a) In der folgenden Abbildung ist das Rechteck aus dem Blattmittelpunkt, zwei Seitenmittelpunkten und einer Ecke des Blattes hervorgehoben, das von beiden Diagonalen jeweils einen Endpunkt enthält. Außerdem ist die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der diagonalen Faltlinien und der gemeinsamen Ecke des Blattes und des Rechtecks dick eingezeichnet:



Eine der Rechteckseiten wird im Inneren von der Diagonalen der Blatthälfte geschnitten; nach dem Strahlensatz ist der Schnittpunkt der Mittelpunkt der Rechteckseite. Daher kann man das Rechteck mit den darin enthaltenen Faltlinienabschnitten auf das ganze Blatt und die gefalteten Diagonalen zur Deckung gebracht werden, indem es zunächst an der gemeinsamen Ecke um den Faktor 2 gestreckt und dann am Blattmittelpunkt punktgespiegelt wird:

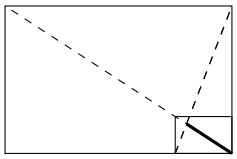
Nach der zentrischen Streckung: 

Nach der Punktspiegelung: 

Also zerteilt der Schnittpunkt die Diagonale des Blattes in zwei Strecken, von denen eine doppelt so lang wie die andere ist. Die Länge der kürzeren Strecke beträgt daher ein Drittel der Länge der Diagonalen. Nach Strahlensatz zerteilt die letzte Faltung somit auch vom Seitenrand des Blattes ein Drittel ab.

Bemerkung: Eine alternative Lösung erhält man durch eine Rechnung im Koordinatensystem.

(b) Die letzte Faltung trennt ein Fünftel des Blattes ab. Der Beweis ist analog wie im ersten Aufgabenteil, wobei das Rechteck jetzt so gewählt wird, dass es zusammen mit den Faltlinien durch eine Streckung an der gemeinsamen Ecke um den Faktor 4 und anschließende Punktspiegelung am Blattmittelpunkt auf das ganze Blatt mit den diagonalen Faltlinien abgebildet wird:



(c) Eine Möglichkeit ist, das Blatt wie beschrieben zu dritteln und das gedrittelte Blatt ebenso erneut zu dritteln.

Eine andere Möglichkeit ist, das Blatt durch dreimaliges Halbieren in derselben Richtung zunächst in Achtel zu zerteilen, anschließend eine Blattdiagonale und eine diese Blattdiagonale schneidende Diagonale eines äußeren Blattachtels und eine zum Rand senkrechte Linie durch den Schnittpunkt zu falten. Der Beweis ist analog.

(d) Man zerlegt das Blatt in Sechstel, indem man es zunächst drittelt und dann halbiert. Dann trennt man mit einer zum Rand senkrechten Faltung durch

den Schnittpunkt einer Blattdiagonalen und einer Diagonalen eines außen liegenden Blattsechstels ein Siebtel des Blattes ab.

(e) Wenn es möglich ist, die Blattseite in n gleiche Teile zu zerlegen, lässt es sich mit der beschriebenen Konstruktion auch in $n+1$ gleiche Teile zerlegen. Da das für $n = 1$ geht (indem man das Blatt überhaupt nicht faltet), geht es also auch für $n = 2$, somit auch für $n = 3$ und so weiter.

Lösung 3. (a) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung

$$200 = 2^3 \cdot 5^2 \,.$$

Da Primzahlen keine Teiler außer 1 und sich selbst haben, kann jeder Teiler von 200 ungleich 1 nur das Produkt von Primfaktoren von 200 sein. Weiterhin kann kein Teiler einen Primfaktor öfter enthalten als 200 selbst. Somit ergibt sich, dass die folgende Liste eine vollständige Liste aller Teiler von 200 ist:

$$1, \quad 2, \quad 4 = 2^2, \quad 5, \quad 8 = 2^3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 20 = 2^2 \cdot 5, \quad 25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5, \quad 50 = 2 \cdot 5^2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \text{und} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 \,.$$

(b) Wir verallgemeinern die Argumentation aus Teil a. Hierfür ist es praktisch, dass wir uns in Erinnerung rufen, dass für jede Zahl $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$. Genauso wie wir in Teil a argumentiert haben, ist jeder Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ ein Produkt von der Form

$$p^i \cdot q^j \cdot r^k \,,$$

wobei i eine ganze Zahl zwischen 0 und 3, j eine ganze Zahl zwischen 0 und 2, und k entweder 0 oder 1 sein muss. Für $i = j = k = 0$ erhalten wir so z. B. den Teiler 1 und für $i = 3$, $j = 2$ und $k = 1$ die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ selbst. Es gibt also 4 mögliche Werte für i, 3 mögliche Werte für j und 2 mögliche Werte für k. Jede dieser Kombinationen ergibt einen anderen Teiler. Hierfür verwenden wir die im Hinweis angegebene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Insgesamt gibt es also genau

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

verschiedene Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$.

(c) Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteil lässt sich sofort verallgemeinern: Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl immer aus ihrer Primfaktorzerlegung ermitteln, indem man zur Häufigkeit (zum Exponenten) jedes Primfaktors 1 addiert und alle diese Zahlen miteinander multipliziert.

So wissen wir, dass eine Zahl x genau dann 6 Teiler hat, wenn sie entweder nur einen Primfaktor hat, der genau fünfmal vorkommt, d. h. $x = p^5$ für eine

Primzahl p, oder wenn x genau zwei Primfaktoren hat, von denen einer einmal und der andere zweimal vorkommt, d. h. $x = p \cdot q^2$. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben, da $6 = 2 \cdot 3$ nur die Teiler 1, 2, 3 und 6 hat und sich als Produkt nur in der Form $1 \cdot 6$ und $2 \cdot 3$ schreiben lässt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p^5$ für eine Primzahl p sind

$$2^5 = 32, \quad 3^5 = 243 \quad \text{und} \quad 5^5 = 3125\,.$$

Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p \cdot q^2$ erhalten wir für $q = 2$

$$3 \cdot 2^2 = 12, \quad 5 \cdot 2^2 = 20, \quad 7 \cdot 2^2 = 28 \quad \text{und} \quad 11 \cdot 2^2 = 44$$

oder $p = 2$

$$2 \cdot 3^2 = 18, \quad 2 \cdot 5^2 = 50 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 7^2 = 98\,.$$

Die kleinste Zahl $x = p \cdot q^2$ für die weder p noch q gleich 2 ist, ist die $45 = 5 \cdot 3^2$ und bisher haben wir schon fünf kleinere Zahlen mit genau sechs Teilern gefunden (tatsächlich ist 45 nur die siebentkleinste Zahl mit genau sechs Teilern).

Somit sind die fünf kleinsten Zahlen mit sechs Teilern die 12, die 18, die 20, die 28 und die 32.

(d) Wenn a ein Teiler von x ist, dann ist auch x/a ein Teiler von x. Falls x keine Quadratzahl ist, dann können wir die Teiler in Paare $(a, x/a)$ aufteilen, und somit ist die Anzahl der Teiler von x dann gerade. Ist $x = y^2$ hingegen eine Quadratzahl, dann lassen sich alle Teiler bis auf $y = x/y$ in Paare aufteilen und daher ist die Anzahl der Teiler dann ungerade.

Hinweis: Man kann alternativ auch mit der Primfaktorzerlegung argumentieren: Quadratzahlen sind genau die Zahlen, bei denen alle Primfaktoren in gerader Anzahl vorkommen, weshalb es genau bei den Teilern der Quadratzahlen für jeden Primfaktor ungerade viele Möglichkeiten gibt, wie häufig er verwendet wird. Genau Produkte von nur ungeraden Faktoren sind ungerade, weshalb genau die Quadratzahlen insgesamt eine ungerade Anzahl an Teilern haben.

Lösung 4. (a) 1. Man erhält die Koeffizienten von $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch Einsetzen der bekannten Werte, zunächst folgt $c = 0$ aus $f(0) = 0a + 0b + c = 0$. Dann erhält man ein lineares Gleichungssystem mit nur noch zwei Unbekannten:

$$f(5) = 25a + 5b + 0 = 6$$
$$f(6) = 36a + 6b + 0 = 5$$

Zieht man $\frac{6}{5}$ der ersten Gleichung von der zweiten ab, erhält man $6a = 5 - \frac{36}{5} = -\frac{11}{5}$, also $a = -\frac{11}{30}$. Damit ist die erste Gleichung $-\frac{55}{6} + 5b = 6$, also ist $b = \frac{6}{5} + \frac{55}{30} = \frac{91}{30}$. Da dies direkte Folgerungen aus den Anforderungen waren, ist eindeutig

$$f(x) = -\frac{11}{30}x^2 + \frac{91}{30}x.$$

Einsetzen zeigt, dass für dieses f wirklich $f(5) = 6$ und $f(6) = 5$ gilt.

2. Da $x = 0$ ausgeschlossen ist, kann man

$$f(x) = -\frac{11}{30}x^2 + \frac{91}{30}x = x$$

durch x teilen und erhält $-\frac{11}{30}x = 1 - \frac{91}{30} = -\frac{61}{30}$, also ist $x = \frac{61}{11}$ der Fixpunkt.

3. $g(x) = f(x) - x$ ist stetig, $g(5) = f(5) - 5 = 6 - 5 = 1$ und $g(6) = f(6) - 6 = 5 - 6 = -1$. Also gibt es nach Zwischenwertsatz ein x^* mit $5 \le x^* \le 6$, für das $g(x^*) = 0$ gilt (da 0 zwischen den Funktionswerten -1 und 1 liegt). Es ist also $g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$, also ist $f(x^*) = x^*$ und x^* ist der gesuchte Fixpunkt.

(b) 1. Es ist wieder ein lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} f(5) &= 25a + 5b + c = 6 \\ f(6) &= 36a + 6b + c = 7 \\ f(7) &= 49a + 7b + c = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} & 1c+5b+25a = 6 & & 1c+5b+25a = 6 & & 1c+0b+0a = \frac{12+25\cdot 3-5\cdot 35}{2} \\ \Leftrightarrow & 1c+6b+36a = 7 & \Leftrightarrow & 0c+1b+11a = 1 & \Leftrightarrow & 0c+1b+0a = \frac{2+11\cdot 3}{2} \\ & 1c+7b+49a = 5 & & 0c+0b+2\,a = -3 & & 0c+0b+1a = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Also ist (wieder eindeutig)

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{2}x - 44.$$

2. $g(x) = f(x) - x$ ist stetig, $g(6) = f(6) - 6 = 7 - 6 = 1$ und $g(7) = f(7) - 7 = 5 - 7 = -2$. Genau wie oben gibt es nach Zwischenwertsatz ein x^* mit $6 \le x^* \le 7$, für das $g(x^*) = 0$ gilt (da 0 zwischen den Funktionswerten -2 und 1 liegt). Es ist also $g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$, also ist $f(x^*) = x^*$ und x^* ist der gesuchte Fixpunkt.

3. $f(f(5)) = f(6) = 7$, $f(f(7)) = f(5) = 6$ und $f(f(6)) = f(7) = 5$ ist eine Periode der Länge 3 der Funktion $f(f(x))$.

4. $h(x) = f(f(x)) - x$ ist stetig, $h(5) = f(f(5)) - 5 = 7 - 5 = 2$ und $h(6) = f(f(6)) - 6 = 5 - 6 = -1$. Also hat $f(f(x))$ einen Fixpunkt x^{**} mit $5 \leq x^{**} \leq 6$, der eine Periode der Länge zwei von f selbst ist: $f(x^{**}) = \bar{x}$ und $f(\bar{x}) = f(f(x^{**})) = x^{**}$. Da $x^{**} \neq 6$, ist der Punkt x^{**} auch nicht x^* mit $6 \leq x^* \leq 7$. Trotzdem ist es möglich, dass $f(x^{**}) = x^{**}$ ist, die Periode der Länge zwei also gar nicht wirklich die Länge zwei hat, sondern wieder ein Fixpunkt ist. In Wirklichkeit gibt es eine echte Periode der Länge zwei, wie im Zusatzteil gezeigt wird.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zunächst stellt man fest, dass jedes Intervall $[a_1, a_2]$, das von f so abgebildet wird, dass jeder Punkt von $[a_1, a_2]$ wieder getroffen wird, einen Fixpunkt hat. Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteilen hing nicht von der Wahl der Endpunkte ab, sondern nur davon, dass es $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$ gibt mit $f(b_1) = a_1$ und $f(b_2) = a_2$.

Wenn man nacheinander n Intervalle hat, von denen jeder Punkt durch f aus dem Vorgängerintervall getroffen wird und die Grenzen aufeinandergehen, so hat man dann auch eine Periode, die ein Teiler von n ist, wenn man am Schluss wieder im ersten Intervall ist: Im Beispiel trifft $[5, 6]$ auf $[6, 7]$ und dieses wieder auf $[5, 6]$. Man muss nun die Periode in diesem Zyklus von Intervallen finden. Man wählt deshalb (rückwärts für die Intervalle, die nacheinander getroffen werden) in jedem Intervall ein Teilintervall, das genau auf das Nachfolgerintervall trifft, also nicht noch Punkte außerhalb des Intervalls. Dies ist möglich, indem man den Punkt sucht, von dem das erste Mal die zweite Intervallgrenze getroffen wird, nachdem vorher die erste getroffen wurde; der Bereich zwischen dem letzten Treffen der ersten Intervallgrenze und dem ersten Treffen der zweiten ist das gesuchte Intervall.

Hat das erste Intervall im Zyklus keinen Punkt mit den anderen gemeinsam, so ist die Periode nicht nur ein Teiler von n, sondern n selbst. Im Beispiel trifft $[5, 6]$ auf $[6, 7]$ und dieses wiederum auf $[5, 6]$, also ist dies der Fall.

Da von $[5, 6]$ jeder Punkt in $[6, 7]$ getroffen wird, von $[6, 7]$ aber sowohl jeder Punkt in $[5, 6]$, als auch jeder Punkt in $[6, 7]$ selbst, kann man sich Zyklen beliebiger Länge mit den gerade genannten Eigenschaften bauen: Man nimmt zunächst $[5, 6]$, dann $n - 1$ mal $[6, 7]$ und erst dann wieder den Anfang $[5, 6]$. Darin findet man auf die gleiche Weise wie eben eine Periode n.

Bemerkung: Ausführlich kann man dieses Argument auf den Seiten 4 bis 6 von „The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof“ von *Keith Burns* und *Boris Hasselblatt* (2008) nachlesen, momentan zu finden unter:

http://math.arizona.edu/˜dwang/BurnsHasselblattRevised-1.pdf