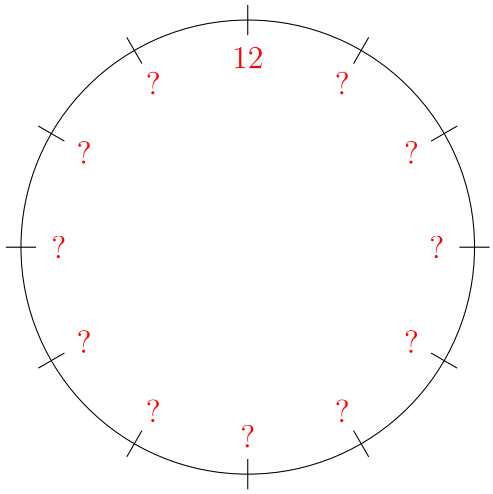
Klassenstufen 7, 8



Aufgabe 1 (5+4+4+5+2 Punkte)**.** Meister Hora hat eine kuriose Uhr: Bei dieser springt der Stundenzeiger nicht wie üblich jede Stunde um 30°, sondern um 150° (im Uhrzeigersinn).

(a) Wie müsste das Ziffernblatt aussehen, wenn man trotzdem die Stunde von „1“ bis „12“ ablesen können soll? (Die „12“ soll immer oben sein.)

(b) Gebt einen anderen Winkel als 30° und 150° an, bei dem auch jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann und bei dem der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist.

(c) Welche anderen Uhren kann es noch geben, bei denen der Stundenzeiger jede Stunde um einen festen Winkel im Uhrzeigersinn springt, so dass jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann und bei denen der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist?

(d) Warum kann es außer den genannten und von euch gefundenen Uhren in den vorangegangenen Aufgabenteilen keine weiteren geben? (Hinweis: Betrachtet Winkel als Brüche, also $30° = \frac{1}{12} \cdot V$, $150° = \frac{5}{12} \cdot V$ usw. mit dem Vollwinkel $V = 360°$.)

(e) Erreicht der Stundenzeiger immer irgendwann wieder die Ausgangsstellung, wenn er jede Stunde um einen beliebigen Bruch multipliziert mit 360° springt? Erklärt kurz eure Antwort.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Beschreibt, was passiert, wenn der Stundenzeiger jede Stunde um einen Winkel springt, der nicht ein beliebiger Bruch multipliziert mit 360° ist. (Solche Zahlen gibt es.)

Aufgabe 2 (4+4+5+5+2 Punkte)**.** In der Musik gibt es Noten mit Notenwerten:

Note	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	...
Notenwert	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

Außerdem kann man noch einen Punkt hinter eine Note setzen. Diese punktierten Noten werden dadurch um die Hälfte ihres Werts verlängert, zum Beispiel hat die Note ♪. den Wert $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$. (Für Kenner: Andere Notenwerte wie Triolen sollen nicht verwendet werden.)

Mehrere Noten bilden einen Takt, zum Beispiel müssen sich in einem $\frac{4}{4}$-Takt die Notenwerte der enthaltenen Noten zu $\frac{4}{4}$ addieren. In einem Rhythmus kommt es auf die Reihenfolge der Noten an. Oben ist ein Beispiel für den Rhythmus eines $\frac{4}{4}$-Takts.

(a) Schreibt alle acht möglichen Rhythmen eines $\frac{4}{4}$-Takts auf, in dem die Nenner der Notenwerte höchstens 4 betragen.

(b) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{2}{4}$-Takten gibt es, in denen die Nenner der Notenwerte höchstens 8 betragen, wenn keine punktierten Noten verwendet werden dürfen?

(c) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{3}{4}$-Takten gibt es, in denen die Nenner der Notenwerte höchstens 8 betragen, wenn keine punktierten Noten verwendet werden dürfen? (Hinweis: Unterscheidet zwischen Rhythmen, die 0, 2, 4 oder 6 Achtelnoten beinhalten.)

In der Musik kann man auch mehrere Noten zusammenfassen, man benutzt dafür Bindebögen, zum Beispiel beträgt bei den verbundenen Noten 𝅗𝅥‿♩‿♪‿𝅘𝅥𝅯 der gesamte Notenwert $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. Dadurch wird die Mathematik einfacher, weil man nun alle Vielfachen des kürzesten Notenwerts bekommen kann. (Nur der Wert entscheidet: 𝅗𝅥‿♩ = 𝅗𝅥. = ♩‿𝅗𝅥)

(d) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{4}{4}$-Takten gibt es, wenn Bindebögen zugelassen sind und der Nenner der Notenwerte höchstens 1 betragen darf? Wie viele ... 2 betragen darf? Wie viele ... 4 betragen darf? Wie viele ... 8 betragen darf?

(e) Wie viele verschiedene Rhythmen von $\frac{4}{4}$-Takten gibt es jeweils, wenn Bindebögen zugelassen sind und der Nenner der Notenwerte höchstens 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 usw. betragen darf?

Aufgabe 3 (6+5+5+4 Punkte). (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

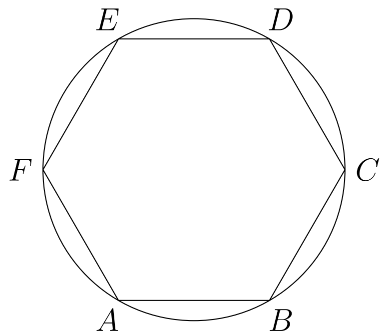
(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 4 (2+2+6+4+2+2+2 Punkte)**.** Es sollen Winkel zwischen verschiedenen Punkten eines regelmäßigen Sechsecks bestimmt werden (jeweils mit Begründung; Messen ist keine Begründung):



Wie groß sind

(a) $\angle AEC$,

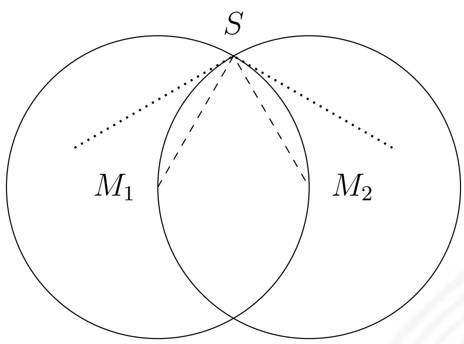
(b) $\angle ADC$,

(c) $\angle AFD$, $\angle DAF$, $\angle FDA$,

(d) $\angle CBA$ und $\angle BAC$?

(e) Gibt es noch andere Winkelgrößen, die kleiner als 180° sind, in Dreiecken bestehend aus Eckpunkten des regelmäßigen Sechsecks? Begründet.

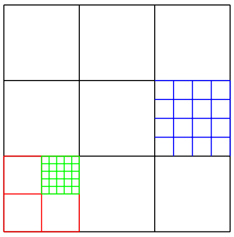
Nun betrachten wir zwei Kreise, die jeweils durch den Mittelpunkt des anderen gehen:



(f) Bestimmt den Winkel bei einem Schnittpunkt S der Kreise zu den beiden Kreismittelpunkten M_1 und M_2: $\angle M_1SM_2$

(g) Bestimmt den Winkel beim Schnittpunkt S zwischen einer Tangente an den ersten Kreis mit einer Tangente an den anderen Kreis.

Klassenstufen 9, 10



Beispiel einer Zerlegung in vier Schritten (Zerlegungszahl $n = 51$)

Aufgabe 1 (6+4+4+3+3 Punkte)**.** In dieser Aufgabe geht es zunächst um eine schrittweise Zerlegung eines Einheitsquadrats in kleinere Quadrate:

> In jedem Schritt wird eines der bestehenden Quadrate in *gleichgroße*, kleinere Quadrate zerlegt.

Die Gesamtanzahl der unzerlegten Quadrate bei einer möglichen Zerlegung sei als Zerlegungszahl n bezeichnet.

(a) Gebt eine schrittweise Zerlegung des anfänglichen Einheitsquadrats an, die $n = 13$ ergibt.

(b) Zeigt, dass ab $n = 15$ jede Zerlegungszahl dargestellt werden kann.

(c) Entscheidet, ob für die Zahl 14 eine solche schrittweise Zerlegung existiert (also: Entscheidet, ob 14 eine mögliche Zerlegungszahl ist).

Wir gehen jetzt von der Zerlegung des Einheitsquadrats zur analogen Zerlegung des Einheitswürfels. Hierbei wird ganz analog ein bestehender Teilwürfel in gleichgroße, kleinere Würfel zerlegt.

(d) Bestimmt eine Zerlegung des Ausgangswürfels in 158 kleinere Würfel.

(e) Die kleineren Würfel in einer Zerlegung können ganz unterschiedliche Kantenlängen haben. Mit m sei die kleinste solche Kantenlänge bezeichnet. Ermittelt das größte m für erlaubte Zerlegungen in 343 Würfel.

Aufgabe 2 (6+5+5+4 Punkte). (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 3 (6+6+8 Punkte)**.** (a) Auf die zwölf Kanten eines Würfels werden in irgendeiner Anordnung die Zahlen 1 bis 12 verteilt. Wir identifizieren jetzt die Kante mit ihrer Zahl.

Wir betrachten die Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenlaufen. Begründet, dass diese nicht für alle Ecken übereinstimmen kann, unabhängig davon, wie die Zahlen verteilt wurden.

(b) Nun werden auf die zwölf Kanten, wieder in irgendeiner Anordnung, zwölf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen verteilt (zum Beispiel die Zahlen von 43 bis 54).

Begründet, dass die Anordnung immer noch nicht so sein kann, dass die Eckensummen gleich sind.

(c) Betrachten wir nun ein Tetraeder – das hat weniger Ecken und Kanten. An die vier Ecken werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 verteilt und die Zahlen 5 bis 10 werden an die sechs Kanten verteilt. Als Flächensumme wird die Summe der drei Eckzahlen und der drei Kantenzahlen bezeichnet.

Begründet, dass es keine Verteilung der Kantenzahlen gibt, so dass alle Flächensummen gleich sind.

Aufgabe 4 (3+6+6+5 Punkte)**.** Im Viereck $ABCD$ sei das Dreieck ΔACD rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Weiterhin sei Q der Punkt auf der Geraden AB, für den der Winkel $\angle CQA$ ein rechter ist.

(a) Skizziert ein solches Viereck $ABCD$ so, dass der zugehörige Punkt Q außerhalb der Strecke AB liegt.

(b) Zeigt, dass das Viereck $AQCD$ einen Umkreis hat.

Ab jetzt sei die Gerade AC die Winkelhalbierende vom Winkel $\angle BAD$.

(c) Zeigt, dass $B = Q$ genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck ist.

(d) Nun liege B auf der Mittelsenkrechten von A und C. Beweist, dass dann BC parallel zu AD ist.

Hinweise:

- Ein n-Eck hat einen *Umkreis* genau dann, wenn alle n Eckpunkte auf einem Kreis – seinem Umkreis – liegen.
- Ein Drachenviereck ist ein Viereck, dass aus zwei Paaren gleichlanger Seiten besteht, wobei sich jedes dieser Paare jeweils in einem Eckpunkt des Drachenvierecks schneidet.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (4+4+4+4+4 Punkte)**.** Zwei Spieler schreiben abwechselnd nach eigener Wahl die Ziffern 0 oder 1 hintereinander. Verloren hat, wer keine Ziffer mehr schreiben kann, ohne dass sich dadurch in der Zahl eine Ziffernfolge der Länge k wiederholt.

Für $k = 3$ hat zum Beispiel beim Spielstand

$$110111$$

Spieler 1, der gerade am Zug ist, verloren. Durch das Schreiben einer 1 ergäbe sich die Zeichenfolge $110\overline{1\underline{11}}\underline{1}$, in der sich die Zeichenfolge 111 wiederholt. Sollte Spieler 1 eine 0 schreiben, dann ergäbe sich die Zeichenfolge $\overline{110}1\underline{110}$, in der sich 110 wiederholt.

(a) Schreibt alle Spielabläufe für $k = 2$ auf. Wie viele Ziffern können maximal hintereinander stehen?

(b) Zeigt, dass für $k = 2$ der zweite Spieler immer gewinnen kann. (Es muss eine Antwort auf jeden möglichen Zug des Gegners zu jeder Zeit benannt werden und natürlich begründet werden, warum man so gewinnt.)

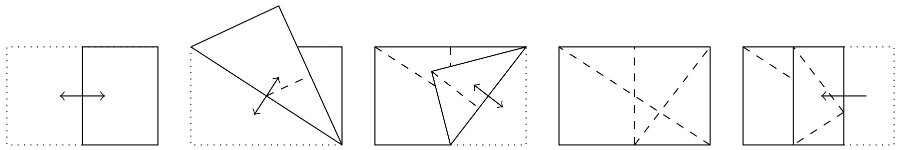
(c) Zeigt, dass das Spiel für jedes mögliche $k \geq 2$ endlich ist (also für jeden Spielablauf endlich viele Züge hat).

(d) Gebt ein längstmögliches Spiel für $k = 3$ an.

(e) Beweist, dass der zweite Spieler bei $k = 3$ immer gewinnen kann, indem er jeweils auf „0“ mit „1“ reagiert und umgekehrt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Findet Gewinnstrategien für weitere k.

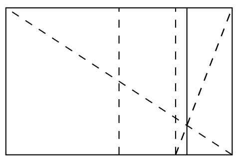
Aufgabe 2 (5+5+3+3+4 Punkte)**.** Karla möchte einen Brief entlang der längeren Seite gedrittelt übereinander falten, damit er in den Umschlag passt. Sie hat kein Lineal zu Hand, kommt aber durch Probieren auf die folgende Faltkonstruktion:



Sie halbiert das Blatt an der langen Seite, indem sie die Ecken aufeinanderlegt, und faltet wieder auf. Dann knickt sie das Blatt einmal entlang einer Diagonalen, faltet wieder auf, knickt danach entlang einer Diagonalen einer Blatthälfte, so dass sich die beiden gefalteten Diagonalen kreuzen, und faltet erneut auf. Anschließend zerteilt Karla die lange Seite mit einer Faltung durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, so dass die Ränder aufeinanderliegen.

(a) Zeigt, dass die letzte Faltung tatsächlich immer genau ein Drittel abtrennt.

(b) Karla probiert weiter und viertelt nun zunächst das Blatt, indem sie eine Blatthälfte erneut in derselben Richtung halbiert. Um die lange Seite zu zerteilen, faltet sie nun durch den Schnittpunkt der großen Diagonalen mit einer Diagonalen eines der äußeren Blattviertel, wieder so, dass die Ränder aufeinanderliegen. (In der folgenden Abbildung sieht man die Linie der letzten Faltung durchgezogen und alle anderen Faltlinien gestrichelt eingezeichnet:)



Welcher Teil des Blattes wird bei der letzten Faltung abgetrennt?

(c) Gebt eine Faltkonstruktion an, mit der man eine Blattseite ohne zu messen in neun gleiche Teile zerlegen kann. Dabei sollen nur Faltungen vorkommen, bei denen die Faltlinie durch zwei (bestimmte) Punkte geht, bei denen ein Punkt auf einen anderen oder eine Gerade (Faltlinie oder Blattkante) auf eine andere gelegt wird oder bei denen die Faltlinie senkrecht zu einer Geraden durch einen Punkt verläuft. Als Teil der Lösung können Blätter mit nach der Reihenfolge nummerierten Faltlinien abgegeben werden.

(d) Gebt eine solche Faltkonstruktion an, die eine Blattseite in sieben gleiche Teile zerlegt.

(e) Beweist, dass man für jede natürliche Zahl n eine solche Faltkonstruktion findet, um eine Seite des Blattes in n gleiche Teile zu teilen.

Aufgabe 3 (6+5+5+4 Punkte). (a) Gebt die zwölf Teiler von 200 an und zeigt, dass 200 keine weiteren Teiler hat.

(b) Seien p, q und r verschiedene Primzahlen. Beweist, dass die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ genau 24 Teiler hat.

(c) Ermittelt die fünf kleinsten Zahlen mit genau sechs Teilern.

(d) Zeigt:

- Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern.
- Wenn eine Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern hat, ist diese immer eine Quadratzahl.

Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass jede natürliche Zahl größer 1 eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Zum Beispiel ist $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Aufgabe 4 (4+3+3+3+2+3+2 Punkte)**.** In verschiedenen Gebieten wird beobachtet, wie sich die Population einer bestimmten Tierart im Laufe der Jahre verändert. Es wird angenommen, dass es eine Funktion f gibt, die für eine Populationsdichte x (Tiere pro m^2) angibt, wie die Populationsdichte $f(x)$ des nächsten Jahres ist. Dieses dynamische System soll nun untersucht werden, ohne dass f wirklich bekannt ist.

(a) Beobachtungen legen nahe, dass f eine Periode der Länge 2 hat: $f(5) = 6$ und $f(6) = 5$.

1. Angenommen f sei ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $f(0) = 0$. Bestimmt ein mögliches f. Ist f eindeutig festgelegt?
2. Berechnet für euer im vorherigen Teil bestimmtes f einen weiteren Fixpunkt $f(x) = x$, also eine Populationsdichte, die sich nicht verändert.
3. Die Annahmen aus dem ersten Teil sollen nun nicht mehr gelten. f soll nur noch *stetig* sein (unmathematisch: der Graph der Funktion lässt sich ohne abzusetzen zeichnen), insbesondere soll sie den *Zwischenwertsatz* erfüllen: Jeder Wert zwischen den an zwei Stellen angenommenen Funktionswerten wird auch dazwischen angenommen, also für $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gibt es zu jedem y^* zwischen y_1 und y_2 ein x^* zwischen x_1 und x_2, so dass $f(x^*) = y^*$ gilt.
   Beweist, dass jede stetige Funktionen mit der oben genannten Periode auch immer einen Fixpunkt $f(x) = x$ im Intervall $[5, 6]$ hat.
   Hinweis: Betrachtet die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$.

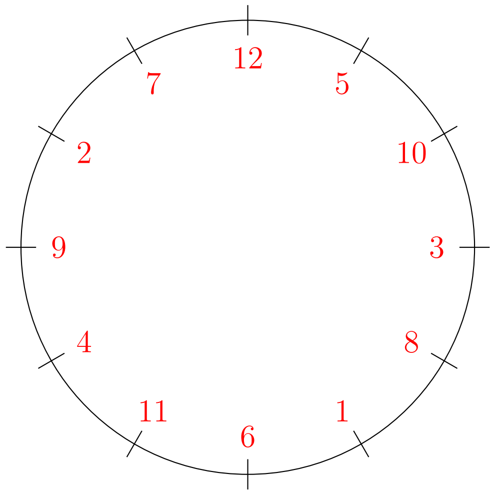
(b) Für eine andere Tierart wird beobachtet, dass f eine Periode der Länge 3 hat: $f(5) = 6$, $f(6) = 7$ und $f(7) = 5$.

1. Angenommen, f sei ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimmt ein mögliches f. (Hinweis: Hier wird nicht $f(0) = 0$ angenommen, es darf Zu- bzw. Abwanderung von Tieren geben.)
2. Beweist, dass jede stetige Funktion f mit der oben genannten Periode der Länge 3 auch einen Fixpunkt $f(x) = x$ hat.
3. Beweist, dass für jede stetige Funktion f mit einer solchen Periode der Länge 3 auch $f \circ f$ eine Periode der Länge 3 hat. (Schreibweise: $f \circ f$ bedeutet, dass f zweimal ausgeführt wird, also $f \circ f(x) = f(f(x))$.)
4. Beweist, dass jede stetige Funktion mit einer solchen Periode der Länge 3 auch eine Periode der Länge 2 hat oder einen weiteren Fixpunkt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Beweist, dass jede stetige Funktion mit einer Periode der Länge 3 auch eine Periode der Länge n hat für jedes $n \in \mathbb{N}$. Bemerkung: Diese Aussage ist ein Teil des berühmten Satzes von Sharkovsky.

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Das Ziffernblatt sollte wie folgt aussehen:



(b) Mit dem Winkel 210° kann man das Ziffernblatt aus dem vorherigen Teil an der vertikalen Achse gespiegelt benutzen, da $210° = 360° - 150°$ ist.

(c) Außer den in der Aufgabenstellung genannten Winkeln 30° und 150° sowie 210° aus dem vorangegangenen Aufgabenteil, darf der Winkel nur noch 330° sein, so dass die Uhr genau gespiegelt zur normalen Uhr läuft.

(d) Zum Einen soll die Uhr nach zwölf Stunden wieder in der Ausgangsstellung sein, so dass der Winkel ein Vielfaches von $\frac{1}{12} \cdot 360°$ sein muss. Zum Anderen dürfen unter den Vielfachen $1\cdot$, $2\cdot$, ..., $12\cdot$ der Winkel keine zwei gleichen Winkel sein, sonst könnte man die Zeit nicht eindeutig ablesen. Insbesondere darf nur $12\cdot$ dem Winkel wieder ein Vielfaches von 360° sein. Das ist nicht der Fall, wenn der gekürzte Bruch nicht mehr den Nenner 12 hat:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \ \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \ \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \ \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \ \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \ \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \ \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Ist der Nenner nämlich 2, 3, 4 oder 6, so wird schon nach 2, 3, 4 bzw. 6 Stunden wieder die Ausgangsstellung erreicht. Nur $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ lassen sich nicht mehr kürzen, so dass 30°, 150°, 210° und 330° die einzigen möglichen Winkel sind.

(e) Springt die Uhr jede Stunde um einen beliebigen Bruch multipliziert mit 360°, so erreicht sie immer irgendwann ihre Ausgangsstellung: Spätestens nach so vielen Stunden, wie der Nenner des Bruchs groß ist, hat sie nämlich ein Vielfaches von 360° zurückgelegt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wenn der Stundenzeiger jede Stunde um einen Winkel springt, der nicht ein beliebiger Bruch multipliziert mit 360° ist, zeigt er nie zweimal auf dieselbe Stelle: Hätte er nämlich n Stunden später dieselbe Position erreicht und dabei $z \cdot 360°$ zurückgelegt, müsste er jede Stunde um $\frac{z}{n} \cdot 360°$ gesprungen sein.

Außerdem kommt der Stundenzeiger jedem Punkt auf dem Ziffernblatt beliebig nahe: Da er auf unendlich viele verschiedene Punkte zeigt, gibt es für jeden noch so kleinen Winkel zwei Zahlen auf dem Ziffernblatt, zwischen denen der Winkel noch kleiner ist. Wenn sich aber die Positionen der Zahlen n und $n + k$ nur um den kleinen Winkel α unterscheiden, findet man auch die Positionen der Zahlen $n + 2k$, $n + 3k$ usw. immer jeweils in derselben Richtung um α weiter verschoben auf dem Ziffernblatt. Also gibt es keinen Kreisbogen eines noch so kleinen Winkels auf dem Ziffernblatt, in den der Stundenzeiger nie zeigt.

Der Stundenzeiger trifft also keine Position doppelt, kommt aber in jedem noch so kleinen Bereich vorbei (und zwar unendlich oft). Bei so einer Uhr kann man also nicht nur die Stunde, sondern jedes künftige Datum und die Stunde eindeutig ablesen, und die unendlich vielen Beschriftungen sind gleichmäßig auf dem Rand verteilt.

Lösung 2. (a) | 𝅝 |, | 𝅗𝅥. ♩ |, | 𝅗𝅥 𝅗𝅥 |, | 𝅗𝅥 ♩ ♩ |, | ♩ 𝅗𝅥. |, | ♩ 𝅗𝅥 ♩ |, | ♩ ♩ 𝅗𝅥 |, | ♩ ♩ ♩ ♩ |.

(b) Es gibt sechs verschiedene solche Rhythmen:

| 𝅗𝅥 |, | ♩ ♩ |, | ♩ ♪ ♪ |, | ♪ ♩ ♪ |, | ♪ ♪ ♩ |, | ♪ ♪ ♪ ♪ |.

(Verdoppelt man die Notenwerte, erhält man jeweils genau einen der sechs Rhythmen ohne punktierte Noten aus dem ersten Aufgabenteil.)

Es gibt offensichtlich genau zwei solche Rhythmen ohne Achtel und einen mit vier Achteln. Falls ein solcher Rhythmus zwei Achtel enthält, kann er zusätzlich nur eine Viertelnote enthalten, die die erste, zweite oder dritte Note sein kann. Also gibt es keine weiteren solchen Rhythmen.

(c) Falls ein solcher Takt keine Achtel enthält, kann er entweder eine halbe und eine Viertelnote oder nur Viertelnoten enthalten. Im ersten Fall gibt es zwei Möglichkeiten und im zweiten Fall nur eine, also gibt es drei solche Rhythmen.

Enthält ein solcher Takt genau zwei Achtel, kann der Rest des Takts aus einer halben oder aus zwei Viertelnoten bestehen. Im ersten Fall kann die halbe Note an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Im zweiten Fall gibt es sechs Möglichkeiten, jeweils drei wenn die letzte Note ein Viertel bzw.

ein Achtel ist. (Das andere Viertel bzw. Achtel kann dann jeweils an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen.) Es gibt also neun solche Rhythmen mit genau zwei Achteln.

Falls genau vier Achtel vorkommen, kann der Takt zusätzlich nur ein Viertel enthalten, das jeweils als erste bis fünfte Note gespielt werden kann.

Außerdem gibt es noch den Rhythmus aus genau sechs Achteln.

Damit erhält man insgesamt $3 + 9 + 5 + 1 = 18$ mögliche Rhythmen.

(d) Wenn der Nenner maximal 1 bzw. 2 betragen darf, gibt es einen bzw. zwei mögliche Rhythmen (nur den aus einer ganzen Note oder zusätzlich den aus zwei halben). Aus dem ersten Aufgabenteil ist bekannt, dass es acht mögliche Rhythmen aus Notenwerten mit dem maximalen Nenner 4 gibt, und mit Hilfe der Bindebögen können hier nur Noten gebildet werde, die es auch als normale und als punktierte Noten gab, z. B. ♩♩♩ = ♩𝅗𝅥 = 𝅗𝅥. .

Die Anzahl der möglichen Rhythmen mit maximalem Nenner 8 erhält man zum Beispiel durch folgende Überlegung: Man kann jeden dieser Rhythmen als acht Achtel schreiben, von denen einige durch Bindebögen verbunden sind. Zwischen zwei benachbarten Achteln gibt es jeweils zwei Möglichkeiten: Entweder sie werden miteinander verbunden oder es beginnt eine neue Note. Da es sieben Stellen zwischen benachbarten Achteln gibt, erhält man also $2^7 = 128$ verschiedene Möglichkeiten.

(e) Mit der Überlegung aus dem letzten Aufgabenteil ermittelt man 2^{15} Möglichkeiten für den maximalen Nenner 16, 2^{31} Möglichkeiten für den maximalen Nenner 32 und so weiter.

Lösung 3. (a) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung

$$200 = 2^3 \cdot 5^2 .$$

Da Primzahlen keine Teiler außer 1 und sich selbst haben, kann jeder Teiler von 200 ungleich 1 nur das Produkt von Primfaktoren von 200 sein. Weiterhin kann kein Teiler einen Primfaktor öfter enthalten als 200 selbst. Somit ergibt sich, dass die folgende Liste eine vollständige Liste aller Teiler von 200 ist:

$$1, \quad 2, \quad 4 = 2^2, \quad 5, \quad 8 = 2^3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 20 = 2^2 \cdot 5, \quad 25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5, \quad 50 = 2 \cdot 5^2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \text{und} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2 .$$

(b) Wir verallgemeinern die Argumentation aus Teil a. Hierfür ist es praktisch, dass wir uns in Erinnerung rufen, dass für jede Zahl $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$.

Genauso wie wir in Teil a argumentiert haben, ist jeder Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ ein Produkt von der Form

$$p^i \cdot q^j \cdot r^k\,,$$

wobei i eine ganze Zahl zwischen 0 und 3, j eine ganze Zahl zwischen 0 und 2, und k entweder 0 oder 1 sein muss. Für $i = j = k = 0$ erhalten wir so z. B. den Teiler 1 und für $i = 3$, $j = 2$ und $k = 1$ die Zahl $p^3 \cdot q^2 \cdot r$ selbst. Es gibt also 4 mögliche Werte für i, 3 mögliche Werte für j und 2 mögliche Werte für k. Jede dieser Kombinationen ergibt einen anderen Teiler. Hierfür verwenden wir die im Hinweis angegebene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Insgesamt gibt es also genau

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

verschiedene Teiler von $p^3 \cdot q^2 \cdot r$.

(c) Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteil lässt sich sofort verallgemeinern: Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl immer aus ihrer Primfaktorzerlegung ermitteln, indem man zur Häufigkeit (zum Exponenten) jedes Primfaktors 1 addiert und alle diese Zahlen miteinander multipliziert.

So wissen wir, dass eine Zahl x genau dann 6 Teiler hat, wenn sie entweder nur einen Primfaktor hat, der genau fünfmal vorkommt, d. h. $x = p^5$ für eine Primzahl p, oder wenn x genau zwei Primfaktoren hat, von denen einer einmal und der andere zweimal vorkommt, d. h. $x = p \cdot q^2$. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben, da $6 = 2 \cdot 3$ nur die Teiler 1, 2, 3 und 6 hat und sich als Produkt nur in der Form $1 \cdot 6$ und $2 \cdot 3$ schreiben lässt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren). Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p^5$ für eine Primzahl p sind

$$2^5 = 32, \quad 3^5 = 243 \quad \text{und} \quad 5^5 = 3125\,.$$

Die kleinsten Zahlen x vom Typ $x = p \cdot q^2$ erhalten wir für $q = 2$

$$3 \cdot 2^2 = 12, \quad 5 \cdot 2^2 = 20, \quad 7 \cdot 2^2 = 28 \quad \text{und} \quad 11 \cdot 2^2 = 44$$

oder $p = 2$

$$2 \cdot 3^2 = 18, \quad 2 \cdot 5^2 = 50 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 7^2 = 98\,.$$

Die kleinste Zahl $x = p \cdot q^2$ für die weder p noch q gleich 2 ist, ist die $45 = 5 \cdot 3^2$ und bisher haben wir schon fünf kleinere Zahlen mit genau sechs Teilern gefunden (tatsächlich ist 45 nur die siebentkleinste Zahl mit genau sechs Teilern).

Somit sind die fünf kleinsten Zahlen mit sechs Teilern die 12, die 18, die 20, die 28 und die 32.

(d) Wenn a ein Teiler von x ist, dann ist auch x/a ein Teiler von x. Falls x keine Quadratzahl ist, dann können wir die Teiler in Paare $(a, x/a)$ aufteilen, und somit ist die Anzahl der Teiler von x dann gerade. Ist $x = y^2$ hingegen eine Quadratzahl, dann lassen sich alle Teiler bis auf $y = x/y$ in Paare aufteilen und daher ist die Anzahl der Teiler dann ungerade.

Hinweis: Man kann alternativ auch mit der Primfaktorzerlegung argumentieren: Quadratzahlen sind genau die Zahlen, bei denen alle Primfaktoren in gerader Anzahl vorkommen, weshalb es genau bei den Teilern der Quadratzahlen für jeden Primfaktor ungerade viele Möglichkeiten gibt, wie häufig er verwendet wird. Genau Produkte von nur ungeraden Faktoren sind ungerade, weshalb genau die Quadratzahlen insgesamt eine ungerade Anzahl an Teilern haben.

Lösung 4. Vorbemerkung: Vermutlich bekannt ist, dass die Innenwinkelsumme im Sechseck $6 \cdot 180° - 360° = 720°$ ist: Um das einzusehen, zerlegt man das Sechseck in 6 Dreiecke, indem man von jedem Eckpunkt die Strecke zum Mittelpunkt M hinzufügt. Die Innenwinkelsumme der Dreiecke zusammen ist dann $6 \cdot 180°$, von denen alle außer dem Vollwinkel um den Mittelpunkt zu Innenwinkeln des Sechsecks gehören. Deshalb müssen noch $360°$ abgezogen werden. Im regelmäßigen Sechseck ist deshalb jeder Innenwinkel $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$. Am Mittelpunkt M ist jeder Winkel zwischen zwei benachbarten Eckpunkten gleich, also $\frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$. Da die Hälfte jedes Innenwinkels $\frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$ ist, lässt sich das regelmäßige Sechseck also in sechs regelmäßige Dreiecke aufteilen.

(a) $\angle AEC = 60°$, da ΔAEC aus Symmetriegründen ein gleichseitiges Dreieck ist.

(b) $\angle ADC = 60°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Sechsecks ist.

(c) $\angle AFD = 90°$, da F auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser AD liegt. $\angle DAF = 60°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Sechsecks ist. $\angle FDA = 30°$, da es die Hälfte eines Innenwinkels des regelmäßigen Dreiecks ΔBDF ist. Bemerkung: Natürlich muss man nur zwei dieser Winkel kennen und kann den dritten über die Innenwinkelsumme im Dreieck ΔADF berechnen, insbesondere muss man den Satz des Thales nicht kennen, wenn man die Feststellung aus der Vorbemerkung kennt.

(d) $\angle CBA = 120°$ ist ein Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks. Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck ΔABC erhält man $\angle BAC + \angle ACB = 180° - \angle CBA = 60°$. Aus Symmetriegründen müssen die Winkel aber gleich sein, also ist $\angle BAC = \angle ACB = 30°$.

(e) Da Drehungen und Spiegelungen von bereits untersuchten Dreiecken aus Sechseckpunkten keine neuen Winkel liefern, muss man nur von jeder Art Dreieck eins untersuchen: Drei benachbarte Sechseckpunkte bilden zum Beispiel ΔABC und zwei benachbarte und ein gegenüberliegender ΔADF. Ohne benachbarte Punkte kann man nur jeden zweiten Sechseckpunkt nehmen, also zum Beispiel ΔACE. Dies sind alle Arten von Dreiecken und von jedem wurden in den vorangegangenen Aufgabenteilen alle Innenwinkel bestimmt. Punkte des regelmäßigen Sechsecks können also nur Winkel von 30°, 60°, 90° und 120° bilden.

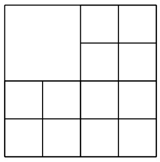
(f) M_1S und M_1M_2 sind Radien des Kreises um M_1, also gilt $M_1S = M_1M_2$. Genauso gilt $M_1M_2 = M_2S$, da dieses Radien des Kreises um M_2 sind. ΔM_1M_2S ist also ein regelmäßiges Dreieck und $\angle M_1SM_2 = 60°$. Bemerkung: Wenn man das Sechseck aus den vorangegangenen Aufgabenteilen in den Kreis um M_1 einzeichnet, kann man deshalb zum Beispiel $M_2 = C$ und $S = D$ wählen und dann ist $\angle M_1SM_2 = \angle ADC$.

(g) Jeder der Tangenten steht senkrecht auf einem der Radien M_1S oder M_2S. Um den Winkel zwischen den Tangenten auszurechnen, kann man also die beiden rechten Winkel addieren und $\angle M_1SM_2$ abziehen, den man dann doppelt gezählt hat:

$$90° + 90° - \angle M_1SM_2 = 180° - 60° = 120°$$

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Eine mögliche Zerlegung in 13 Quadrate erhält man, indem man das Quadrat im ersten Schritt in 4 kleinere zerlegt und in weiteren drei Schritten jeweils eins dieser 4 Quadrate erneut in 4 Quadrate teilt:



(b) Ausgehend vom ursprünglichen Quadrat fällt in einem Zerlegungsschritt immer ein unzerlegtes Quadrat weg, während eine beliebige Quadratzahl an unzerlegten Quadraten hinzukommen. Die Zerlegungszahl steigt also in jedem Schritt um $k^2 - 1$ mit einer beliebigen natürlichen Zahl k, also um 3, 8, 15 usw.

Man erhält so die Zerlegungszahlen $15 = 1 + 8 + 3 + 3$, $16 = 1 + 15$ und $17 = 1+8+8$. Dies sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, also kann man jede gewünschte größere Zerlegungszahl durch entsprechend häufiges Hinzufügen von 3 zu einer dieser Zahlen erreichen.

(c) Die 14 ist nicht darstellbar: Alle Quadratzahlen größer als 9 sind größer als 14, also würde bei einer schrittweisen Zerlegung in 14 Quadrate in jedem Schritt ein Quadrat in 4 oder 9 Quadrate zerlegt werden. Nach einer Zerlegung eines Quadrats in 9 Quadrate hat man 8 unzerlegte Quadrate mehr, also könnte ein solcher Schritt höchstens einmal vorkommen. Daher wäre die Zerlegungszahl entweder von der Form $1 + 8 + 3k = 3(k + 3)$ und somit ein Vielfaches von 3 oder von der Form $3k + 1$, also in jedem Fall von 14 verschieden.

(d) Eine mögliche Zerlegung erhält man, indem man den Würfel im ersten Schritt in 125 Würfel (mit Kantenlänge $\frac{1}{5}$) teilt und in zwei weiteren Schritten jeweils einen Würfel in 27 bzw. 8 Würfel (mit Kantenlänge jeweils $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{2}$ von der Kantenlänge des entsprechenden Würfels): Dabei erhält man $125 + 26 + 7 = 158$ unzerlegte Würfel.

(e) Da $343 = 7^3$ ist, lässt sich der Einheitswürfel in 343 Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{7}$ zerlegen. In jeder Zerlegung des Einheitswürfels in 343 Würfel muss mindestens ein Würfel mindestens das Volumen $\frac{1}{343}$ und somit mindestens die Kantenlänge $\frac{1}{7}$ haben, also ist $\frac{1}{7}$ das größte solche m.

Lösung 2. Siehe Lösung 3 der Klassenstufe 7, 8.

Lösung 3. (a) Addiert man alle acht Summen aus den Kanten, die jeweils an einer Ecke zusammenlaufen, dann kommt jede Kante in der Gesamtsumme zweimal vor. Somit beträgt die Gesamtsumme dann

$$\begin{aligned}&2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12)\\=&2\cdot((1+12)+(2+11)+(3+10)+(4+9)+(5+8)+(6+7))\\=&2\cdot 6\cdot 13=156,\end{aligned}$$

sie ist also nicht durch 8 teilbar. Also können die Summen nicht für alle Ecken übereinstimmen.

(b) Die 12 aufeinanderfolgenden Zahlen lassen sich in der Form $k+1, k+2, \ldots, k+12$ schreiben, wobei k eine ganze Zahl ist. Die Gesamtsumme der Summen an jeder Ecke beträgt dann

$$\begin{aligned}&2\cdot((k+1)+(k+2)+\cdots+(k+12))\\=&2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12)+2\cdot 12k\\=&156+24k.\end{aligned}$$

Da nur der zweite Summand in der letzten Zeile ein Vielfaches von 8 ist, teilt 8 nicht die Gesamtsumme.

(c) Jede Kante gehört zu zwei Flächen und jede Ecke zu drei Flächen. Daher beträgt die Gesamtflächensumme (Summe der 4 Flächensummen)

$$3\cdot(1+2+3+4)+2\cdot(5+6+7+8+9+10)=120\ .$$

Unter der Annahme dass die Aussage gilt, muss für jede der vier Flächen die Flächensumme $\frac{120}{4}=30$ betragen.

Für die Fläche, die durch die Ecken mit den Eckgewichten 1, 2 und 3 aufgespannt wird, muss die Summe der Kantengewichte

$$30-(1+2+3)=24$$

betragen. Für die Fläche, die durch die Ecken mit den Eckgewichten 2, 3 und 4 aufgespannt wird, muss die Summe der Kantengewichte

$$30-(2+3+4)=21$$

betragen.

Beide genannten Flächen haben genau eine gemeinsame Kante, welche mit c bezeichnet wird. Die verbleibenden werden mit a, b, d und e bezeichnet. Für diese zwei Flächen muss die Gesamtkantensumme $(a+b+2c+d+e)$

$$(30-(1+2+3))+(30-(2+3+4))=24+21=45$$

betragen.

Die Summanden a, b, c, d und e sind paarweise verschieden. Somit lässt sich 45 als Summe von sechs Summanden schreiben, die aus $\{5,6,7,8,9,10\}$ stammen, wobei genau ein Summand (nämlich c) doppelt und genau ein Element (mit f bezeichnet) nicht als Summand auftritt.

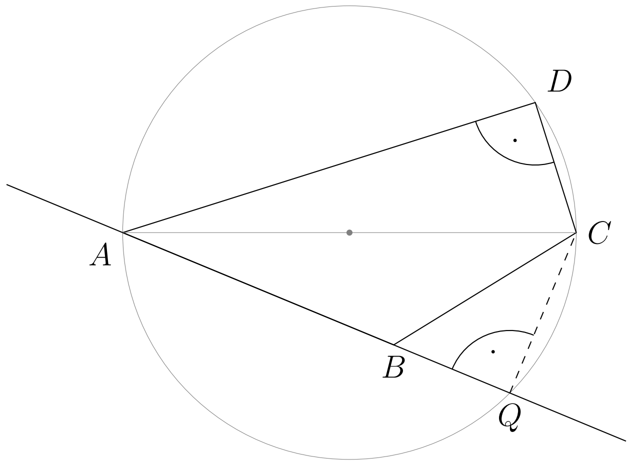
Das heißt

$$45 = a + b + 2c + d + e = \underbrace{5+6+7+8+9+10}_{=45} + c - f = 45 + c - f \neq 45$$

da $c \neq f$.

Folglich ist die Annahme falsch, was zeigt, dass es keine Anordnung gibt für die die Flächensumme für jede Fläche gleich ist.

Lösung 4. (a) Die folgende Skizze zeigt ein Beispiel für ein solches Viereck. (Der Thaleskreis von AC ist für die Lösung des nächsten Aufgabenteils grau eingezeichnet.)



(b) Nach der Umkehrung vom Satz des Thales liegen D und Q auf dem Thaleskreis über der Strecke AC, also auf dem Kreis mit Durchmesser AC.

(c) Wenn AC den Winkel $\angle BAD = \angle QAD$ halbiert, ist Q das Spiegelbild von D bei der Spiegelung an der Geraden AC. Also ist dann $AQCD$ ein Drachenviereck. Somit ist $ABCD$ ein Drachenviereck, falls $B = Q$ erfüllt ist.

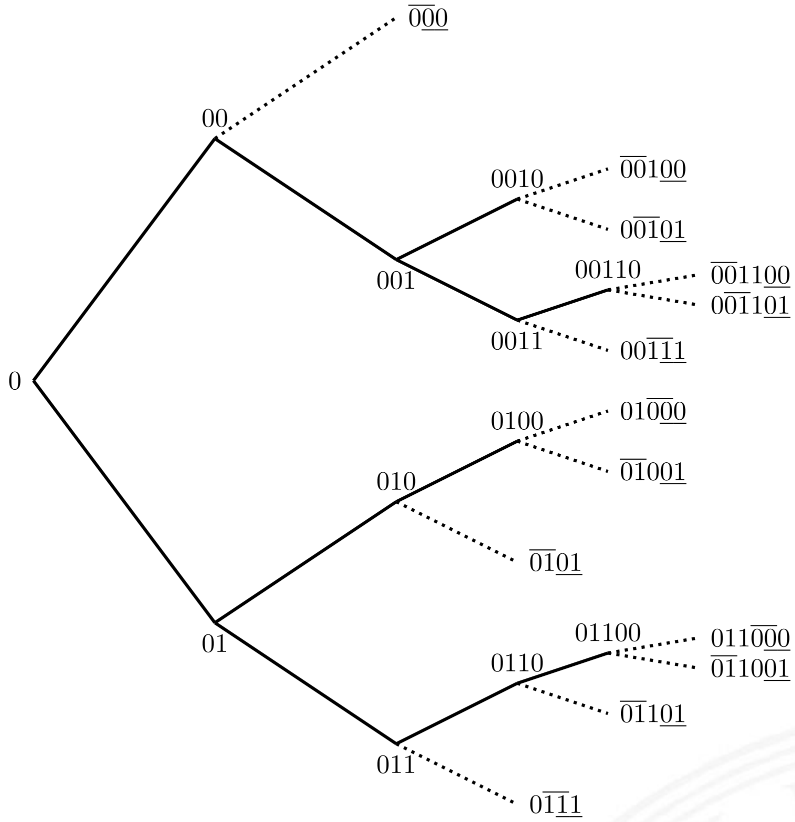
Andererseits sind die Strecken AB und AD gleich lang, wenn $ABCD$ ein Drachenviereck ist. Da B und Q beide auf der Geraden durch A und B und bezüglich A auf derselben Seite liegen, gilt $B = Q$.

Bemerkung: Wäre BD eine Symmetrieachse, dann läge eine Raute vor, die sogar ein Quadrat wäre.

(d) Spiegelt man A an der Mittelsenkrechten von A und C, so erhält man als Bildpunkt C. Daher ist das Dreieck ABC gleichschenkelig; insbesondere sind die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ACB$ gleich groß. Da die Gerade AC Winkelhalbierende ist, sind auch die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CAD$ gleich groß. Somit sind $\angle ACB$ und $\angle CAD$ Wechselwinkel und die Geraden BC und AD parallel.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Als erstes überlegen wir uns, dass es keine Rolle spielt, ob Spieler 1 mit einer Null oder einer Eins beginnt, und wir listen nur die Spielabläufe auf, die mit einer Null beginnen. Alle anderen Spiele erhält man einfach durch Vertauschen aller Nullen und Einsen. Wir listen die Spielabläufe mit einem Baumdiagramm aus, wobei gepunktete Linien nichterlaubte Züge darstellen, da sie zu wiederholten Teilziffernfolgen führen. Ein Spiel endet also in dem Baumdiagramm genau dann, wenn von dem entsprechenden Spielstand zwei gepunktete Linien ausgehen.



Es gibt also vier Spiele, die damit beginnen, dass Spieler 1 eine Null schreibt, nämlich

$$0010, \quad 00110, \quad 0100 \quad \text{und} \quad 01100\,.$$

Insgesamt gibt es also acht verschiedene Spielabläufe. Die längsten Spiele bestehen aus fünf gültigen Zügen (00110, 01100, 11001 und 10011).

(b) Aus dem Baumdiagramm kann man eine solche Strategie ablesen und es lässt sich folgende Strategie für Spieler 2 formulieren:

Schreibe immer die Ziffer, die Spieler 1 im ersten Zug gewählt hat.

Beginnt Spieler 1 mit Null, dann schreibt Spieler 2 der Strategie folgend auch eine Eins. Danach kann Spieler 1 nur eine Eins schreiben (siehe Baumdiagramm) und Spieler 2 schreibt wieder eine Null. Dies ergibt die Ziffernfolge 0010, die sich nicht mehr erweitern lässt, und demnach hat Spieler 2 gewonnen. Sollte Spieler 1 mit einer Eins beginnen, dann ergibt sich der gleiche Spielablauf mit Nullen und Einsen vertauscht und endet mit 1101.

(c) Es reicht die Feststellung, dass es nur endlich viele Folgen der Länge k gibt und es somit keine unendliche Folge gibt, in der sich keine Folge der Länge k wiederholt. Man kann aber genauer Abschätzen, wie lang ein Spiel maximal sein darf.

Eine Ziffernfolge mit ℓ Ziffern enthält genau $\ell-(k-1)$ Teilfolgen bestehend aus k Ziffern. Die erste Ziffernfolge der Länge k entsteht also beim k-ten Zug, die zweite beim $(k+1)$-ten usw. Auf der anderen Seite gibt es nur 2^k verschiedene Ziffernfolgen der Länge k, die ausschließlich aus Nullen und Einsen bestehen. Wenn in einem Spiel also $\ell = 2^k + k - 1$ Züge gemacht wurden, dann wurden $\ell - (k-1) = 2^k$ Ziffernfolgen der Länge k erzeugt und da es mehr nicht gibt, muss spätestens bei der nächsten Ziffer eine Wiederholung auftreten. Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $k \geq 2$ ein Spiel aus maximal $2^k + k - 1$ Zügen besteht.

Für $k = 2$ ergibt die Formel eine Spiellänge von maximal fünf Zügen und in Teil a hatten wir vier solche Spiele angegeben.

(d) In Teil c wurde gezeigt, dass ein Spiel für $k = 3$ maximal aus $2^3 + 3 - 1 = 10$ Zügen bestehen kann. Somit reicht es, ein Spiel dieser Länge anzugeben. Insgesamt gibt es 16 solche Spiele:

0001011100,	0100011101,	1000101110,	1100010111,
0001110100,	0101110001,	1000111010,	1101000111,
0010111000,	0111000101,	1010001110,	1110001011,
0011101000,	0111010001,	1011100010,	1110100011.

(e) Angenommen die vorgeschlagene Strategie führt nicht immer zu einem Sieg von Spieler 2. Dann muss es einen Spielablauf geben, so dass die Strategie von Spieler 2 zu einem nicht erlaubten Zug führt. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass Spieler 1 zuvor eine Eins gespielt hat und Spieler 2 nun Null spielen will, aber nicht darf. Mit x bezeichnen wir den vorletzten Zug von Spieler 2. Über den Wert von x können wir erst mal keine Aussage treffen, es kann Null sein oder auch Eins.

Das Scheitern der Strategie von Spieler 2 heisst, dass irgendwo in dem Spielablauf die Folge $x10$ schon einmal vorkam. Wir unterscheiden zwei Fälle, abhängig davon, wer damals das x gespielt hat.

Falls Spieler 2 damals das x hingeschrieben hat, dann hatte davor Spieler 1 gezogen und y hingeschrieben, wobei y das „Umgekehrte“ von x sein muss. (Also entweder ist $x = 1$ und $y = 0$ oder $x = 0$ und $y = 1$.) Am Spielende hatte aber Spieler 2 auch das x hingeschrieben und mit der gleichen Begründung hatte Spieler 1 davor auch y gespielt. Somit hat sich die Folge $yx1$ schon beim letzten Zug von Spieler 1 wiederholt und dieser hätte bereits verloren.

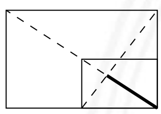
Es bleibt noch der Fall zu betrachten, in dem Spieler 1 beim ersten Aufschreiben der Folge $x10$ das x gespielt hat. In diesem Fall hat Spieler 2 damals danach eine Eins aufgeschrieben, also muss $x = 0$ gelten. Des Weiteren hat dann auch Spieler 1 die Null am Ende von $x10$ hingeschrieben und Spieler 2 antwortete darauf mit einer Eins. Es wurde damals also die Teilfolge

$$0101$$

gespielt (wobei die erste Null dem x entspricht). Am Ende des Spiels hat dann Spieler 2 das x gespielt, was, wie wir eben festgestellt haben, eine Null gewesen sein muss. Somit muss Spieler 1 zuvor eine Eins gespielt haben und an dem Punkt, an dem Spieler 2 nicht mehr ziehen kann, steht 101 (wobei die Null dem x entspricht). Die Teilfolge 101 erschien aber bereits zuvor (in $0\underline{101}$) und somit hätte Spieler 1 bereits verloren.

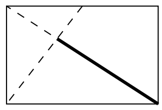
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Für $k = 4$ gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 1. Die ist allerdings nicht so einfach hinschreibbar wie die Strategien für $k = 2$ und $k = 3$. Für ungerades k funktioniert immer die Strategie von Aufgabenteil e und der angegebene Beweis lässt sich dafür verallgemeinern. Für gerade $k \geq 6$ ist keine Gewinnstrategie bekannt.

Lösung 2. (a) In der folgenden Abbildung ist das Rechteck aus dem Blattmittelpunkt, zwei Seitenmittelpunkten und einer Ecke des Blattes hervorgehoben, das von beiden Diagonalen jeweils einen Endpunkt enthält. Außerdem ist die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der diagonalen Faltlinien und der gemeinsamen Ecke des Blattes und des Rechtecks dick eingezeichnet:

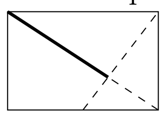


Eine der Rechteckseiten wird im Inneren von der Diagonalen der Blatthälfte geschnitten; nach dem Strahlensatz ist der Schnittpunkt der Mittelpunkt der Rechteckseite. Daher kann man das Rechteck mit den darin enthaltenen Faltlinienabschnitten auf das ganze Blatt und die gefalteten Diagonalen zur Deckung gebracht werden, indem es zunächst an der gemeinsamen Ecke um den Faktor 2 gestreckt und dann am Blattmittelpunkt punktgespiegelt wird:

Nach der zentrischen Streckung:



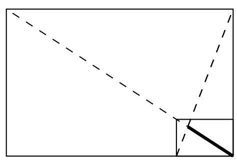
Nach der Punktspiegelung:



Also zerteilt der Schnittpunkt die Diagonale des Blattes in zwei Strecken, von denen eine doppelt so lang wie die andere ist. Die Länge der kürzeren Strecke beträgt daher ein Drittel der Länge der Diagonalen. Nach Strahlensatz zerteilt die letzte Faltung somit auch vom Seitenrand des Blattes ein Drittel ab.

Bemerkung: Eine alternative Lösung erhält man durch eine Rechnung im Koordinatensystem.

(b) Die letzte Faltung trennt ein Fünftel des Blattes ab. Der Beweis ist analog wie im ersten Aufgabenteil, wobei das Rechteck jetzt so gewählt wird, dass es zusammen mit den Faltlinien durch eine Streckung an der gemeinsamen Ecke um den Faktor 4 und anschließende Punktspiegelung am Blattmittelpunkt auf das ganze Blatt mit den diagonalen Faltlinien abgebildet wird:



(c) Eine Möglichkeit ist, das Blatt wie beschrieben zu dritteln und das gedrittelte Blatt ebenso erneut zu dritteln.

Eine andere Möglichkeit ist, das Blatt durch dreimaliges Halbieren in derselben Richtung zunächst in Achtel zu zerteilen, anschließend eine Blattdiagonale und eine diese Blattdiagonale schneidende Diagonale eines äußeren Blattachtels und eine zum Rand senkrechte Linie durch den Schnittpunkt zu falten. Der Beweis ist analog.

(d) Man zerlegt das Blatt in Sechstel, indem man es zunächst drittelt und dann halbiert. Dann trennt man mit einer zum Rand senkrechten Faltung durch den Schnittpunkt einer Blattdiagonalen und einer Diagonalen eines außen liegenden Blattsechstels ein Siebtel des Blattes ab.

(e) Wenn es möglich ist, die Blattseite in n gleiche Teile zu zerlegen, lässt es sich mit der beschriebenen Konstruktion auch in $n+1$ gleiche Teile zerlegen. Da das für $n = 1$ geht (indem man das Blatt überhaupt nicht faltet), geht es also auch für $n = 2$, somit auch für $n = 3$ und so weiter.

Lösung 3. Siehe Lösung 3 der Klassenstufe 7, 8.

Lösung 4. (a) 1. Man erhält die Koeffizienten von $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch Einsetzen der bekannten Werte, zunächst folgt $c = 0$ aus $f(0) = 0a + 0b + c = 0$. Dann erhält man ein lineares Gleichungssystem mit nur noch zwei Unbekannten:

$$f(5) = 25a + 5b + 0 = 6$$
$$f(6) = 36a + 6b + 0 = 5$$

Zieht man $\frac{6}{5}$ der ersten Gleichung von der zweiten ab, erhält man $6a = 5 - \frac{36}{5} = -\frac{11}{5}$, also $a = -\frac{11}{30}$. Damit ist die erste Gleichung $-\frac{55}{6} + 5b = 6$, also ist $b = \frac{6}{5} + \frac{55}{30} = \frac{91}{30}$. Da dies direkte Folgerungen aus den Anforderungen waren, ist eindeutig

$$f(x) = -\frac{11}{30}x^2 + \frac{91}{30}x.$$

Einsetzen zeigt, dass für dieses f wirklich $f(5) = 6$ und $f(6) = 5$ gilt.

2. Da $x = 0$ ausgeschlossen ist, kann man

$$f(x) = -\frac{11}{30}x^2 + \frac{91}{30}x = x$$

durch x teilen und erhält $-\frac{11}{30}x = 1 - \frac{91}{30} = -\frac{61}{30}$, also ist $x = \frac{61}{11}$ der Fixpunkt.

3. $g(x) = f(x) - x$ ist stetig, $g(5) = f(5) - 5 = 6 - 5 = 1$ und $g(6) = f(6) - 6 = 5 - 6 = -1$. Also gibt es nach Zwischenwertsatz ein x^* mit $5 \leq x^* \leq 6$, für das $g(x^*) = 0$ gilt (da 0 zwischen den Funktionswerten -1 und 1 liegt). Es ist also $g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$, also ist $f(x^*) = x^*$ und x^* ist der gesuchte Fixpunkt.

(b) 1. Es ist wieder ein lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$f(5) = 25a + 5b + c = 6$$
$$f(6) = 36a + 6b + c = 7$$
$$f(7) = 49a + 7b + c = 5$$

$$\begin{array}{llll} & 1c+5b+25a = 6 & & 1c+5b+25a = 6 & & 1c+0b+0a = \frac{12+25\cdot 3-5\cdot 35}{2} \\ \Leftrightarrow & 1c+6b+36a = 7 & \Leftrightarrow & 0c+1b+11a = 1 & \Leftrightarrow & 0c+1b+0a = \frac{2+11\cdot 3}{2} \\ & 1c+7b+49a = 5 & & 0c+0b+2a = -3 & & 0c+0b+1a = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Also ist (wieder eindeutig)

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{2}x - 44.$$

2. $g(x) = f(x) - x$ ist stetig, $g(6) = f(6) - 6 = 7 - 6 = 1$ und $g(7) = f(7) - 7 = 5 - 7 = -2$. Genau wie oben gibt es nach Zwischenwertsatz ein x^* mit $6 \leq x^* \leq 7$, für das $g(x^*) = 0$ gilt (da 0 zwischen den Funktionswerten -2 und 1 liegt). Es ist also $g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$, also ist $f(x^*) = x^*$ und x^* ist der gesuchte Fixpunkt.
3. $f(f(5)) = f(6) = 7$, $f(f(7)) = f(5) = 6$ und $f(f(6)) = f(7) = 5$ ist eine Periode der Länge 3 der Funktion $f(f(x))$.
4. $h(x) = f(f(x)) - x$ ist stetig, $h(5) = f(f(5)) - 5 = 7 - 5 = 2$ und $h(6) = f(f(6)) - 6 = 5 - 6 = -1$. Also hat $f(f(x))$ einen Fixpunkt x^{**} mit $5 \leq x^{**} \leq 6$, der eine Periode der Länge zwei von f selbst ist: $f(x^{**}) = \bar{x}$ und $f(\bar{x}) = f(f(x^{**})) = x^{**}$. Da $x^{**} \neq 6$, ist der Punkt x^{**} auch nicht x^* mit $6 \leq x^* \leq 7$. Trotzdem ist es möglich, dass $f(x^{**}) = x^{**}$ ist, die Periode der Länge zwei also gar nicht wirklich die Länge zwei hat, sondern wieder ein Fixpunkt ist. In Wirklichkeit gibt es eine echte Periode der Länge zwei, wie im Zusatzteil gezeigt wird.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zunächst stellt man fest, dass jedes Intervall $[a_1, a_2]$, das von f so abgebildet wird, dass jeder Punkt von $[a_1, a_2]$ wieder getroffen wird, einen Fixpunkt hat. Die Argumentation aus dem vorangegangenen Aufgabenteilen hing nicht von der Wahl der Endpunkte ab, sondern nur davon, dass es $b_1, b_2 \in [a_1, a_2]$ gibt mit $f(b_1) = a_1$ und $f(b_2) = a_2$.

Wenn man nacheinander n Intervalle hat, von denen jeder Punkt durch f aus dem Vorgängerintervall getroffen wird und die Grenzen aufeinandergehen, so hat man dann auch eine Periode, die ein Teiler von n ist, wenn man am Schluss wieder im ersten Intervall ist: Im Beispiel trifft $[5, 6]$ auf $[6, 7]$ und dieses wieder auf $[5, 6]$. Man muss nun die Periode in diesem Zyklus von Intervallen finden. Man wählt deshalb (rückwärts für die Intervalle, die nacheinander getroffen werden) in jedem Intervall ein Teilintervall, das genau auf das Nachfolgerintervall trifft, also nicht noch Punkte außerhalb des Intervalls. Dies ist möglich, indem man den Punkt sucht, von dem das erste Mal die zweite Intervallgrenze getroffen wird, nachdem vorher die erste getroffen wurde; der Bereich zwischen dem letzten Treffen der ersten Intervallgrenze und dem ersten Treffen der zweiten ist das gesuchte Intervall.

Hat das erste Intervall im Zyklus keinen Punkt mit den anderen gemeinsam, so ist die Periode nicht nur ein Teiler von n, sondern n selbst. Im Beispiel trifft $[5, 6]$ auf $[6, 7]$ und dieses wiederum auf $[5, 6]$, also ist dies der Fall.

Da von $[5, 6]$ jeder Punkt in $[6, 7]$ getroffen wird, von $[6, 7]$ aber sowohl jeder Punkt in $[5, 6]$, als auch jeder Punkt in $[6, 7]$ selbst, kann man sich Zyklen beliebiger Länge mit den gerade genannten Eigenschaften bauen: Man nimmt zunächst $[5, 6]$, dann $n - 1$ mal $[6, 7]$ und erst dann wieder den Anfang $[5, 6]$. Darin findet man auf die gleiche Weise wie eben eine Periode n.

Bemerkung: Ausführlich kann man dieses Argument auf den Seiten 4 bis 6 von „The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof“ von *Keith Burns* und *Boris Hasselblatt* (2008) nachlesen, momentan zu finden unter:

http://math.arizona.edu/˜dwang/BurnsHasselblattRevised-1.pdf