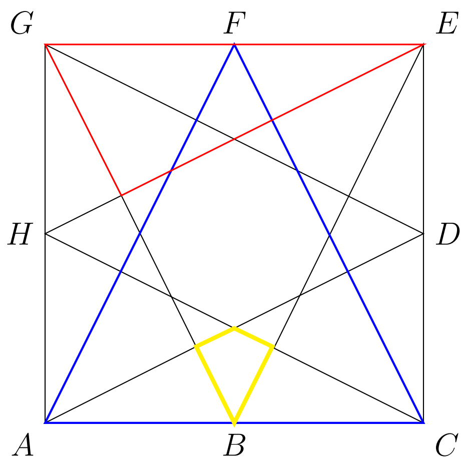
Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1 (5+5+5+5 Punkte)**.** In der Abbildung ist ein Quadrat gezeigt, in dem ein regelmäßiger Stern liegt. Die Kantenlänge des Quadrats möge 1 betragen.



(a) Bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks mit den blauen Seiten.

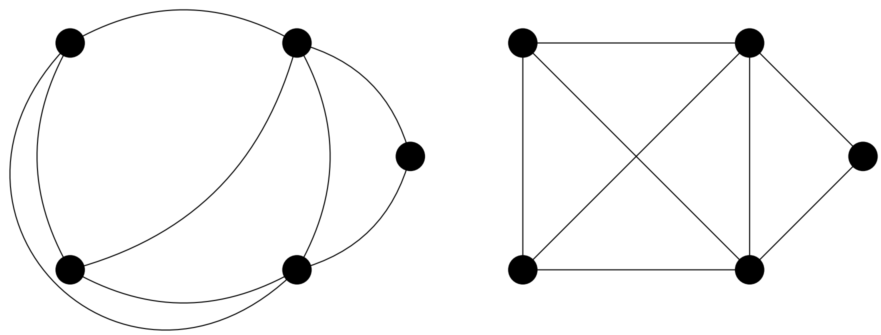
(b) Bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks mit den roten Seiten.

(c) Gebt ein Drachenviereck an, das mit dem blauen Dreieck flächengleich ist und das aus bereits eingezeichneten Linien besteht.

(d) Bestimmt den Flächeninhalt des gelben Drachenvierecks.

Aufgabe 2 (2+2+2+6+8 Punkte)**.** Ein n-Ecken-Graph besteht aus n Ecken (Punkten) und etlichen Kanten (Wegen), die je zwei Ecken verbinden.

In dieser Aufgabe betrachten wir nur zusammenhängende Graphen, das heißt, dass zwischen je zwei Ecken eine Verbindung über Kanten existieren muss.



Beispiel eines 5-Ecken-Graphen (zweimal derselbe), bei dem von zwei Ecken jeweils genau drei Kanten ausgehen, von zwei Ecken jeweils genau vier und von einer Ecke genau zwei.

(a) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von sechs der Ecken jeweils genau drei Kanten ausgehen.

(b) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von vier Ecken je drei Kanten ausgehen und von den anderen drei Ecken je vier Kanten.

(c) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von drei Ecken je fünf Kanten ausgehen, von weiteren drei Ecken je zwei Kanten und von der siebenten Ecke genau drei Kanten.

(d)
- Welche minimale Zahl von Kanten hat ein 7-Ecken-Graph? Begründet!
- Welche minimale Zahl von Kanten hat ein n-Ecken-Graph? Begründet!

(e) Ein Kreis in einem Graphen ist ein „Rundweg“, also eine Abfolge verschiedener Kanten, bei der aufeinanderfolgende Kanten jeweils eine Ecke gemeinsam haben, wobei die letzte wieder mit der ersten eine Ecke gemeinsam hat; jede Ecke soll dabei nur einmal durchlaufen werden. (Ein Kreis braucht also mindestens drei Ecken und drei Kanten.)

- Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit genau drei verschiedenen Kreisen und der minimalen Anzahl an verwendeten Kanten und begründet, warum nicht weniger Kanten verwendet werden können.
- Welches ist die minimale Zahl von Kanten eines n-Ecken-Graphs, der zwei Kreise enthält? Begründet!

Aufgabe 3 (5+5+5+5 Punkte)**.** Zwei Primzahlen, die eine Differenz von 2 aufweisen, nennt man einen Primzahlzwilling; Beispiele dafür sind 5 und 7 oder 29 und 31 oder 101 und 103.

Ein echter Primzahldrilling sind dann drei aufeinanderfolgende Primzahlen mit jeweils Abstand 2. (Wir wollen dies einen $(2,2)$-Drilling nennen.)

(a) Ein echter Primzahlfünfling wären fünf aufeinanderfolgende Primzahlen mit jeweils Abstand 2. Beweist, dass es keinen echten Primzahlfünfling gibt.

(b) Beweist, dass es nur einen echten Primzahldrilling gibt, und gebt ihn an.

(c) Nun kann man sich fragen, ob man weitere solche „Drillinge“ finden kann, wenn die Abstände nicht beide 2 sein müssen.

Wir fordern jetzt, dass von drei aufeinanderfolgenden Primzahlen die beiden Abstände, von der mittleren Primzahl aus gerechnet, einmal 2 und einmal 4 sein sollen; wir suchen also nach $(4,2)$-Drillingen bzw. $(2,4)$-Drillingen.

Gebt davon jeweils vier an.

(d) Beweist, dass es keine $(4,4)$-Drillinge gibt.

Aufgabe 4 (3+2+3+3+3+2+4 Punkte)**.** Hier geht es um quadratische Funktionen f_q mit $f_q(x) = -x \cdot (x - q)$. Beispielsweise gehören die Funktionen $f_1(x) = -x \cdot (x - 1)$, $f_{-2}(x) = -x \cdot (x + 2)$ und $f_\pi(x) = -x \cdot (x - \pi)$ zu diesem Typ.

(a) Welche Nullstellen haben f_1, f_2 und allgemein f_a?

(b) Gebt eine solche Funktion an, die eine Nullstelle bei $x = -5$ hat.

(c) Nun kann man zwei solche Funktionen auch addieren:

$$(f_a + f_b)(x) = f_a(x) + f_b(x) = -x \cdot (x - a) - x \cdot (x - b).$$

Gehört diese Summenfunktion auch zur Klasse der Funktionen f_q?

(d) Welche Nullstellen hat $f_1 + f_2$?

(e) Ermittelt die Funktion f_a, für die $f_1 + f_a$ eine Nullstelle bei $x = 4$ hat.

(f) Ermittelt die Funktion f_a, für die $f_2 + f_a$ nur eine Nullstelle bei $x = 0$ hat.

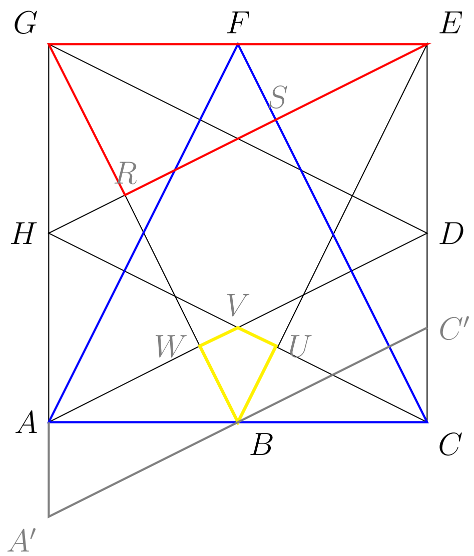
(g) Wie könnte man die Summe der beiden Funktionen so verändern, dass die Summenfunktion wieder vom Typ f_q ist?

Überprüft für euren Vorschlag, ob die Summe das Assoziativ- und das Kommutativgesetz erfüllt.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Im blauen Dreieck haben die Grundseite AC und die Höhe BF jeweils die Länge 1. Der Flächeninhalt beträgt somit $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

(b) Es sei R der Schnittpunkt von HE und GB und S der Schnittpunkt von HE mit FC:



Da GR und FS Parallelen sind und F der Mittelpunkt von GE ist, ist das Dreieck ΔFSE ähnlich zu ΔGRE und hat $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts. Das Dreieck ΔHRG ist kongruent zu ΔFSE, so dass es ebenfalls $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts von ΔGRE hat und damit $\frac{1}{5}$ des Flächeninhalts von ΔEGH. Mit der Grundseite GE mit Länge 1 und der Höhe GH mit Länge $\frac{1}{2}$ hat ΔEGH den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Das rote Dreieck ΔGRE hat $\frac{4}{5}$ dieses Flächeninhalts, also den Flächeninhalt $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

Alternativ: Es sei A' auf der Verlängerung von HA jenseits von A im Abstand $\frac{1}{4}$ zu A. Weiterhin sei C' der Mittelpunkt von CD, also im Abstand $\frac{1}{4}$ zu C.

Da AH und CD Parallelen sind, geht $A'C'$ durch den Mittelpunkt B von AC. Der Punkt H liegt auf $\frac{2}{5}$ der Strecke GA'. Da HE und $A'C'$ Parallelen sind, ist also auch der Schnittpunkt R von HE mit GB auf $\frac{2}{5}$ der Strecke GB nach Strahlensatz. Ebenfalls nach Strahlensatz hat dann auch die Höhe über der Grundseite EG im roten Dreieck ΔREG die Länge $\frac{2}{5}$.

Das rote Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

(c) Das blaue Dreieck erhält man durch Entfernen der Dreiecke ΔAFG und ΔEFC vom Quadrat. Entfernt man stattdessen die Dreiecke ΔAFG und ΔCDA, so bleibt der Drachen $ADEF$, der flächengleich zum blauen Dreieck ΔACF ist, da ΔEFC und ΔCDA kongruent sind (aus Symmetriegründen).

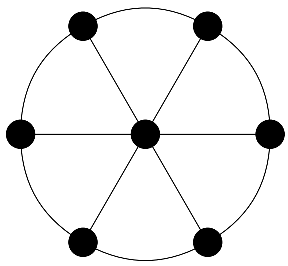
(d) Der Schnittpunkt V von AD und HC hat den Abstand $\frac{1}{4}$ zu AC, da AH und CD parallel sind und jeweils die Länge $\frac{1}{2}$ haben. Also hat das Dreieck ΔACV den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Die Dreiecke ΔBWA und ΔBUC sind kongruent zu ΔHRG, haben also auch $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts des roten Dreiecks ΔGRE, also den Flächeninhalt $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Zieht man diese vom Dreieck ΔACV ab, so bleibt für den gelben Drachen $BUVW$ der Flächeninhalt $\frac{1}{8} - \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = \frac{5-2-2}{40} = \frac{1}{40}$.

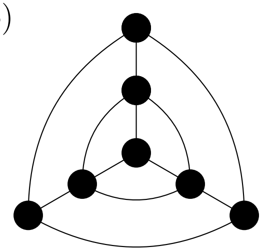
Alternativ: Der Schnittpunkt W von AD und GB liegt auf $\frac{2}{5}$ der Strecke AD, so wie R auf $\frac{2}{5}$ von GB liegt. Analog liegt auch der Schnittpunkt U von CH und EB auf $\frac{2}{5}$ der Strecke CH. Da V der Mittelpunkt von AD ist, liegt W also auf $\frac{4}{5}$ von AV und analog U auf $\frac{4}{5}$ von CV.

Das Dreieck ΔABW belegt also $\frac{4}{5}$ der Fläche von ΔABV, während ΔWBV davon $\frac{1}{5}$ belegt. ΔBUV belegt analog $\frac{1}{5}$ der Fläche von ΔBCV. Der gelbe Drachen $BUVW$ belegt also insgesamt auch $\frac{1}{5}$ der Fläche des Dreiecks ΔACV, hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$.

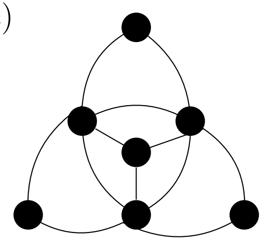
Lösung 2. (a)



(b)

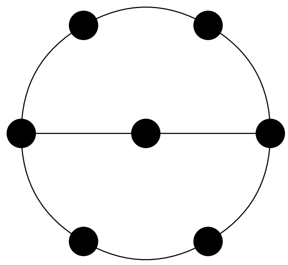


(c)



(d) Ein zusammenhängender 7-Ecken-Graph hat mindestens sechs Kanten. Baut man ihn dadurch auf, dass man beginnend mit einer Ecke jeweils eine Kante zu einem bestehenden zusammenhängenden Graphen hinzufügt, so kann man mit jeder Kante nur eine Ecke hinzubekommen.

Mit derselben Argumentation hat ein zusammenhängender n-Ecken-Graph mindestens $n - 1$ Kanten.

(e) 

Dieser 7-Ecken-Graph hat genau drei Kreise, den „äußeren“, den „oberen“ und den „unteren“. Er besteht aus acht Kanten. Wenn man nacheinander jeweils eine Ecke verbindet, ohne dass ein Kreis entsteht, benötigt man sechs Kanten, damit der Graph zusammenhängend wird. Eine weitere Kante erzeugt den ersten Kreis, jedoch noch keinen zweiten: Da es zuvor keinen Kreis gab, muss jeder Kreis die neue Kante enthalten. Läge die neue Kante in zwei Kreisen, gäbe es aber auch einen Kreis, der nur aus anderen Kanten dieser beiden Kreise besteht. Erst die achte Kante kann daher den zweiten und dritten Kreis erzeugen.

Mit derselben Argumentation erhält man für einen n-Ecken-Graph mindestens $n + 1$ Kanten, damit er zwei Kreise enthält.

Lösung 3. (a) Da es nur eine gerade Primzahl gibt und entweder alle Zahlen des Primzahlfünflings gerade oder alle ungerade sein müssten, müsste ein Primzahlfünfling aus 5 ungeraden Zahlen bestehen. Unter fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen kommt jeweils eine Zahl mit der Endziffer 1, 3, 5, 7 bzw. 9 vor. Da die Zahl mit der Endziffer 5 durch 5 teilbar ist, kann sie nur eine Primzahl sein, falls sie gleich 5 ist. Ein Primzahlfünfling müsste also die Zahl 5 enthalten. Da 3 die einzige ungerade Primzahl unter 5 ist, müssten zu einem Primzahlfünfling dann in jedem Fall auch die Zahlen 7, 9 und 11 gehören. Das ist nicht möglich, da 9 keine Primzahl ist.

(b) Für jede ganze Zahl n ist eine der Zahlen n, $n+2$ und $n+4$ durch 3 teilbar: Es ist klar, dass eine der Zahlen n, $n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und $n+4 = (n+1)+3$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn das für $n+1$ gilt. Ein Primzahldrilling muss also die Zahl 3 enthalten. Da 3 die kleinste ungerade Primzahl ist, gibt es nur den Primzahldrilling aus 3, 5 und 7.

(c) Die ersten fünf $(2, 4)$-Drillinge sind:

$$5,\ 7,\ 11; \qquad 11,\ 13,\ 17; \qquad 17,\ 19,\ 23; \qquad 41,\ 43,\ 47; \qquad 101, 103, 107.$$

Die ersten fünf $(4, 2)$-Drillinge sind:

$$7,\ 11,\ 13; \qquad 13,\ 17,\ 19; \qquad 37,\ 41,\ 43; \qquad 67,\ 71,\ 73; \qquad 97, 101, 103.$$

(Es reichen jeweils schon vier Beispiele.)

(d) Auch ein $(4, 4)$-Drilling müsste die Zahl 3 enthalten, denn für eine ganze Zahl n folgt aus $n + 4 = (n + 1) + 3$ und $n + 8 = (n + 2) + 6$, dass eine der

Zahlen n, $n+4$ und $n+8$ durch 3 teilbar ist. Als kleinste ungerade Primzahl müsste 3 die kleinste Zahl des $(4,4)$-Drillings sein, aber die nächste Primzahl nach 3 ist 5 und die Differenz von 5 und 3 ist 2. Also gibt es keine drei aufeinanderfolgenden Primzahlen, so dass benachbarte jeweils den Abstand 4 haben. Bemerkung: Es gibt aber drei Primzahlen, so dass die größte und die kleinste jeweils den Abstand 4 zur mittleren haben: 3, 7 und 11. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass es genau eine Menge aus drei solchen Primzahlen gibt.

Lösung 4. (a) Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, gilt $f_a(x) = 0$ genau dann, wenn $-x = 0$ oder $x - a = 0$ ist. Also hat f_a die Nullstellen 0 und a. Insbesondere hat f_1 die Nullstellen 0 und 1 und f_2 die Nullstellen 0 und 2.

(b) f_{-5} hat die Nullstellen 0 und -5.

(c) Da

$$(f_a + f_b)(x) = -x \cdot (x-a) - x \cdot (x-b) = -2x^2 + (a+b)x$$

und für jede reelle Zahl c gilt

$$f_c(x) = -x \cdot (x-c) = -x^2 - cx,$$

zeigt ein Koeffizientenvergleich, dass für die Funktionen $f_a + f_b$ und f_c für kein c gleich sind. $f_a + f_b$ ist also keine Funktion von diesem Typ.

(d) Man faktorisiert

$$(f_1 + f_2)(x) = -2x^2 + (1+2)x = -2x(x - \frac{3}{2}),$$

also hat $f_1 + f_2$ die Nullstellen 0 und $\frac{3}{2}$.

(e) Da

$$(f_1 + f_a)(x) = -2x^2 + (1+a)x = -2x(x - \frac{a+1}{2})$$

gilt, hat $(f_1 + f_a)$ die Nullstellen 0 und $\frac{a+1}{2}$. Die Funktion $(f_1 + f_a)$ hat daher genau dann eine Nullstelle bei $x = 4$, wenn

$$\frac{a+1}{2} = 4 \quad \text{bzw. äquivalent} \quad a + 1 = 8,$$

somit genau dann, wenn $a = 7$ gilt.

(f) Man faktorisiert

$$(f_2 + f_a)(x) = -2x^2 + (2 + a)x = -2x(x - \frac{a + 2}{2}),$$

$f_2 + f_a$ hat also die Nullstellen 0 und $\frac{a+2}{2}$. Es gilt $\frac{a+2}{2} = 0$ für $a = -2$.

(g) Allgemein gilt

$$(f_a + f_b)(x) = -2x^2 + (a + b)x = -2x(x - \frac{a + b}{2}).$$

Statt $f_a + f_b$ könnte man die Funktion $\frac{f_a+f_b}{2}$ betrachten, wobei $\frac{f_a+f_b}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{2} + \frac{f_b(x)}{2}$. Dann gilt

$$\frac{f_a + f_b}{2}(x) = -x(x - \frac{a + b}{2}) = f_{\frac{a+b}{2}}(x),$$

also ist $\frac{f_a+f_b}{2}$ eine Funktion vom Typ f_a.

Bemerkung: Da f_a+f_b und $\frac{f_a+f_b}{2}$ die gleichen Nullstellen haben, folgt daraus, dass $f_a + f_b$ die Nullstellen 0 und $\frac{a+b}{2}$ hat.

Kommutativität ist natürlich erfüllt, da

$$\frac{f_a + f_b}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{2} + \frac{f_b(x)}{2} = \frac{f_b(x)}{2} + \frac{f_a(x)}{2} = \frac{f_b + f_a}{2}(x).$$

Assoziativität dagegen ist nicht erfüllt, da

$$\frac{\frac{f_a+f_b}{2} + f_c}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{4}+\frac{f_b(x)}{4}+\frac{f_c(x)}{2} \overset{i.\,A.}{\neq} \frac{f_a(x)}{2}+\frac{f_b(x)}{4}+\frac{f_c(x)}{4} = \frac{f_a + \frac{f_b+f_c}{2}}{2}(x).$$