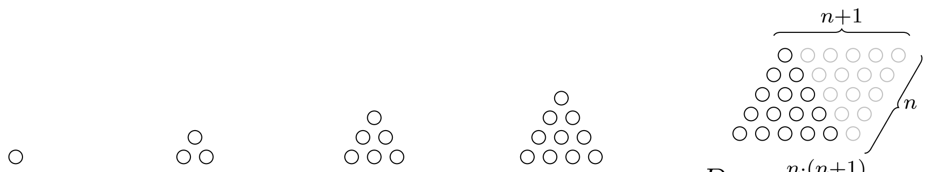
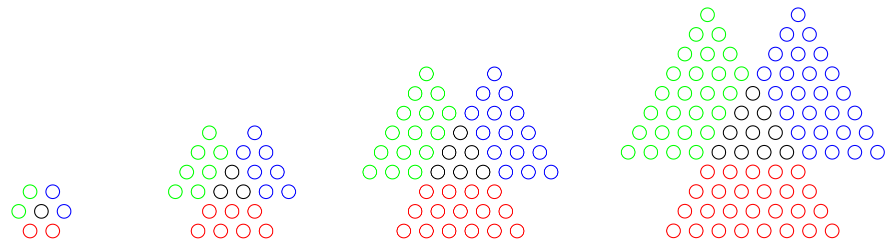
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (4+4+6+4+2 Punkte)**.** Ihr kennt vermutlich schon Dreieckszahlen:



$D_1 = 1$ $D_2 = 3$ $D_3 = 6$ $D_4 = 10$ $D_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Wir betrachten *Windmühlenzahlen*: Drei gleich große gleichseitige Dreiecke überschneiden sich in der Mitte in einem kleineren Dreieck. Die äußeren Dreiecke sollen doppelt so große Seitenlängen haben wie das kleinere. Wir legen die Dreiecke aus Kreisen, die wir zählen.



$W_1 = 7$ $W_2 = 24$ $W_3 = 51$ $W_4 = ?$

(a) Gebt die ersten 6 Windmühlenzahlen an.

(b) Berechnet jeweils die Differenzen aufeinanderfolgender Windmühlenzahlen. Was, vermutet ihr, gilt immer?

(c) Warum kann man die Windmühlenzahl W_n immer durch n teilen?

(d) Berechnet $\frac{W_1}{1}, \frac{W_2}{2}, \frac{W_3}{3}, \ldots, \frac{W_6}{6}$. Was vermutet ihr allgemein für $\frac{W_n}{n}$?

(e) Stellt mit der Vermutung aus dem vorherigen Teil eine Formel für W_n auf.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt).

- Begründet alle Aussagen, die ihr aufgestellt habt.
- Findet andere Herleitungen für die Formel für die Windmühlenzahlen W_n, zum Beispiel auch geometrische.

Aufgabe 2 (4+4+4+4+4 Punkte)**.** *Primzahlen* sind natürliche Zahlen größer als 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben. Man kann zeigen: Ist eine Primzahl ein Teiler eines Produktes zweier natürlicher Zahlen, so ist sie auch Teiler einer der beiden Faktoren.

Jede natürliche Zahl größer 1 kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Dieses nennen wir *Primfaktorzerlegung*. Ordnen wir die Faktoren der Größe nach, ist die Primfaktorzerlegung eindeutig.

Unter den gemeinsamen Vielfachen von zwei (oder mehreren) Zahlen gibt es ein kleinstes: Wir nennen es also das *kleinste gemeinsame Vielfache* und kürzen es ab mit kgV.

Unter den gemeinsamen Teilern von zwei (oder mehreren) Zahlen gibt es einen größten: Wir nennen ihn also den *größten gemeinsamen Teiler* und kürzen ihn ab mit ggT.

Beispiel: Die Primfaktorzerlegungen $6 = 2 \cdot 3$ und $9 = 3 \cdot 3$ helfen, das kgV und den ggT dieser beiden Zahlen zu bestimmen:

$$\mathrm{kgV}(6, 9) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \qquad \mathrm{ggT}(6, 9) = 3$$

(a) Schreibt für jede Zahl die Primfaktorzerlegung auf und berechnet das kgV und den ggT für jedes Zahlenpaar sowie das Produkt aus kgV und ggT:

24 und 36	500 und 121
625 und 25	140 und 105

(b) Gebt die genaue Voraussetzung dafür an, dass das kgV von zwei Zahlen mit dem Produkt dieser Zahlen übereinstimmt. Begründet.

(c) Gebt die genaue Voraussetzung dafür an, dass der ggT von zwei Zahlen mit einer dieser Zahlen übereinstimmt. Begründet.

(d) Kann man für zwei Zahlen das Produkt aus deren kgV und ggT bestimmen, ohne vorher das kgV oder den ggT auszurechnen? Begründet.

(e) Berechnet die kleinste positive Zahl, die durch alle einstelligen Primzahlen teilbar ist.

Aufgabe 3 (6+2+2+3+2+2+3 Punkte)**.** Fußballturniere bestehen oftmals aus zwei Phasen. Zuerst findet eine *Gruppenphase* statt, in der jede Mannschaft einer Gruppe genau einmal gegen jede andere Mannschaft dieser Gruppe spielt. Hier gehen wir davon aus, dass alle Gruppen gleich groß sind und aus mindestens drei Mannschaften bestehen und dass am Ende der Gruppenphase immer ein eindeutiger Gruppensieger bestimmt wird. Nur die Gruppensieger spielen in der zweiten Phase, der sogenannten *K.-o.-Phase*, weiter. Die K.-o.-Phase besteht aus mehreren Runden. In jeder Runde trifft jeder Gruppensieger auf genau einen anderen Gruppensieger. Nur die Gewinner qualifizieren sich für die nächste Runde. In der letzten Runde, dem Finale, wird dann der Sieger des Turniers ermittelt.

Bei diesem einfachen Modell gibt es keine Freilose und auch keine weiteren Spiele um Platz 3 oder andere Platzierungen. Es soll aber erlaubt sein, dass gar keine Gruppenphase stattfindet. Auch kann die K.-o.-Phase entfallen, wenn der Sieger in einem Turnier mit nur einer Gruppe am Ende der Gruppenphase feststeht.

(a) Für Turniere mit 6, 7 oder 8 teilnehmenden Mannschaften:

- Bestimmt alle möglichen Gruppengrößen.
- Gebt an, falls ein Turnierverlauf ohne Gruppenphase möglich ist.
- Ermittelt für jeden möglichen Turnierplan die Anzahl aller Spiele und die Anzahl der Spiele, die der Gewinner spielt.

(b) Für welche Anzahlen von Mannschaften sind Turniere ohne Gruppenphase möglich?

(c) Für welche Anzahlen von Mannschaften sind nur Turniere ohne K.-o.-Phase möglich?

(d) Wie ermittelt man für eine gegebene Anzahl von Mannschaften den Turnierplan mit den wenigsten Spielen? (Begründet.)

Bei dem Brettspiel Halma können zwei oder drei Gegner gleichzeitig gegeneinander spielen. Bei der Hallenhalmaweltmeisterschaft sollen in der Gruppenphase immer nur zwei Gegner aufeinandertreffen, aber in der K.-o.-Phase besteht jede Runde entweder nur aus Spielen mit zwei oder nur aus Spielen mit drei Gegnern.

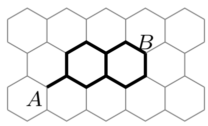
(e) Für welche Anzahlen von Teilnehmern sind solche Turniere ohne Gruppenphase möglich?

(f) Für welche Anzahlen von Teilnehmern sind nur solche Turniere ohne K.-o.-Phase möglich?

(g) Wie ermittelt man für eine gegebene Anzahl von Teilnehmern einen Turnierplan mit den wenigsten Spielen?

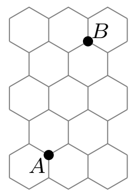
Aufgabe 4 (5+4+4+7 Punkte)**.** In Sechseckstadt verlaufen die Straßen entlang den Linien eines Sechseckgitters. *Punkte* sind die Gitterpunkte. Jeder Punkt hat drei Nachbarn, einen (schräg) *links*, einen (schräg) *rechts* und einen entweder *oben* oder *unten*, wobei wir die Richtungen mit „L“, „R“, „O“ und „U“ abkürzen wollen. Zu jedem Nachbarn ist der Abstand 1.

Pfade sind kürzeste Wege zwischen zwei Punkten, von denen es zu zwei Punkten mehrere geben kann. Die Länge eines Pfades gibt die *Entfernung* der Endpunkte an. Beispiel:



Vom Punkt A zum Punkt B gibt es 3 Pfade, einen RORRRR, einen RRRORR und einen RRRRRO. Sie haben jeweils die Länge 6, also ist 6 die Entfernung von A und B.

(a) Welche Entfernung haben A und B in folgendem Beispiel? Gebt alle Pfade von A nach B an.
(Ihr erhaltet Sechseckpapier zum Ausprobieren, das ihr auch für die Lösungen verwenden könnt.)



(b) Die Einwohner von Sechseckstadt sind sehr umweltbewusst. Daher müssen alle Ziele, die mit dem Auto angefahren werden, mindestens 4 Einheiten entfernt sein; ansonsten muss man zu Fuß gehen.

Markiert in einem Gitternetz einen Punkt A und tragt alle Punkte ein, die man von A aus zu Fuß erreichen muss.

(c) Ein (Sechseck-)Kreis sind die Punkte, die dieselbe Entfernung zu einem Mittelpunkt haben, also denselben (Sechseck-)Radius.

- Markiert jeweils den Mittelpunkt und jeweils die Punkte eines Kreises mit Radius 4 bzw. 7.
- Wie viele Punkte gehören zu einem Kreis mit Radius 4 bzw. 7? Wie ist es allgemein bei Radius n?

(d) Tragt in einem Kreis mit Radius 7 an jedem Punkt ein, wie viele Pfade vom Mittelpunkt zu dem jeweiligen Punkt führen. Benutzt dabei zwei Farben: jeweils eine für Punkte mit ungerader bzw. gerader Entfernung zum Mittelpunkt. (Für eine Lösung mit kleinerem Radius gibt es einen Teil der Punkte.)

Beschreibt (kurz) das Verfahren, die Anzahl der Pfade zu bestimmen.

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) $W_1 = 7$, $W_2 = 24$, $W_3 = 51$, $W_4 = 88$, $W_5 = 135$ und $W_6 = 192$.

(b) $W_2 - W_1 = 17$, $W_3 - W_2 = 27$, $W_4 - W_3 = 37$, $W_5 - W_4 = 47$ und $W_6 - W_5 = 57$. Vermutlich gilt $W_{n+1} - W_n = 10 \cdot n + 7$.

(c) Da die Dreieckszahl $D_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist, ist $2 \cdot D_n$ immer durch n teilbar. Die Windmühlenzahl W_n entsteht aus drei Dreiecken der Seitenlänge $2 \cdot n$ von denen noch zweimal ein Dreieck der Seitenlänge n abgezogen wird, weil sich drei überlappen. Die Dreieckszahl D_{2n} ist als die Hälfte eines Vielfachen von $2n$ durch n teilbar. Das Doppelte der Dreieckszahl D_n ist auch ein Vielfaches von n. Also lässt sich W_n als Summe von Vielfachen von n schreiben und ist daher selbst durch n teilbar.

Hinweis: Wenn man möchte, kann man dies auch als Formel schreiben:

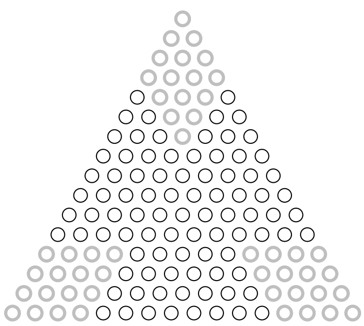
$$\begin{aligned} W_n = 3 \cdot D_{2 \cdot n} - 2 \cdot D_n &= 3 \cdot \frac{2 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1)}{2} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= 3 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) - n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

(d) $\frac{W_1}{1} = 7$, $\frac{W_2}{2} = 12$, $\frac{W_3}{3} = 17$, $\frac{W_4}{4} = 22$, $\frac{W_5}{5} = 27$ und $\frac{W_6}{6} = 32$. Vermutlich gilt $\frac{W_n}{n} = 5 \cdot n + 2$.

(e) Durch Multiplikation der vermuteten Gleichung mit n erhält man $W_n = n \cdot (5 \cdot n + 2)$.

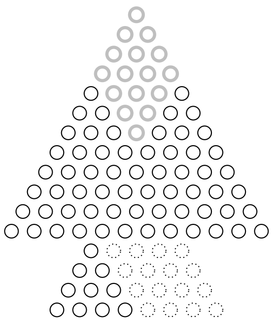
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wie im dritten Teil angedeutet, kann man die Windmühlenzahl W_n als drei Dreiecke doppelter Länge $D_{2 \cdot n}$ abzüglich zweier Dreiecke D_n aus der Überlappung bekommen:

$$\begin{aligned} W_n = 3 \cdot D_{2 \cdot n} - 2 \cdot D_n &= 3 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) - n \cdot (n+1) \\ &= n \cdot (3 \cdot (2 \cdot n + 1) - (n+1)) \\ &= n \cdot (6 \cdot n + 3 - n - 1) = n \cdot (5 \cdot n + 2) \end{aligned}$$



Alternativ kann man in den drei Ecken der Windmühle W_n noch Rauten mit $n \cdot n$ Kreisen ergänzen, so dass man ein Dreieck der Seitenlänge $2 \cdot n + n + n$ erhält: $D_{4 \cdot n} = W_n + 3 \cdot n^2$. Daraus berechnet man:

$$\begin{aligned} W_n &= D_{4 \cdot n} - 3 \cdot n^2 \\ &= \frac{4 \cdot n \cdot (4 \cdot n + 1)}{2} - 3 \cdot n^2 \\ &= 8 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 3 \cdot n^2 = n \cdot (5 \cdot n + 2) \end{aligned}$$



Eine weitere Alternative ist, einen Windmühlenflügel in eine Raute aus $n \cdot n$ Kreisen und ein Dreieck D_n zu zerlegen. Mit der Raute ergänzt man den Rest der Windmühle zu einem Dreieck der Seitenlänge $3 \cdot n$. Also berechnet man:

$$\begin{aligned} W_n &= D_{3\cdot n} + D_n \\ &= \frac{3\cdot n\cdot(3\cdot n+1)}{2} + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\ &= \frac{9\cdot n^2+3\cdot n+n^2+n}{2} \\ &= \frac{10\cdot n^2+4\cdot n}{2} = n\cdot(5\cdot n+2) \end{aligned}$$

Mit der Formel $W_n = n\cdot(5\cdot n+2)$ kann man berechnen

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= (n+1)\cdot(5\cdot(n+1)+2) - n\cdot(5\cdot n+2) \\ &= (n+1)\cdot(5\cdot n+7) - n\cdot(5\cdot n+2) \\ &= 5\cdot n^2+7\cdot n+5\cdot n+7-5\cdot n^2-2\cdot n = 10\cdot n+7. \end{aligned}$$

An der Formel für W_n sieht man zudem sofort, dass W_n durch n teilbar ist, es bleibt bei Division durch n nämlich $\frac{W_n}{n} = 5\cdot n+2$.

Lösung 2. (a) Mit $24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$ und $36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(24,36) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 72 \text{ und } \mathrm{ggT}(24,36) = 2\cdot2\cdot3 = 12,$$

also $\mathrm{kgV}(24,36)\cdot\mathrm{ggT}(24,36) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot3 = 864$.

Mit $500 = 2^2\cdot5^3$ und $121 = 11^2$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(500,121) = 2^2\cdot5^3\cdot11^2 = 60500 \text{ und } \mathrm{ggT}(500,121) = 1,$$

also $\mathrm{kgV}(500,121)\cdot\mathrm{ggT}(500,121) = 2^2\cdot5^3\cdot11^2\cdot1 = 60500$.

Mit $625 = 5^4$ und $25 = 5^2$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(625,25) = 5^4 = 625 \text{ und } \mathrm{ggT}(625,25) = 5^2 = 25,$$

also $\mathrm{kgV}(625,25)\cdot\mathrm{ggT}(625,25) = 5^6 = 15625$.

Mit $140 = 2^2\cdot5\cdot7$ und $105 = 3\cdot5\cdot7$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(140,105) = 2^2\cdot3\cdot5\cdot7 = 420 \text{ und } \mathrm{ggT}(140,105) = 5\cdot7 = 35,$$

also $\mathrm{kgV}(140,105)\cdot\mathrm{ggT}(140,105) = 2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7 = 14700$.

(b) Das kgV von zwei Zahlen stimmt genau dann mit deren Produkt überein, wenn die Zahlen teilerfremd sind, also keine Primzahl in beiden Primfaktorzerlegungen vorkommt.

Begründung: Jeder Faktor der beiden Zahlen muss im kgV vorkommen. Gibt es keine gemeinsamen Faktoren, so ergibt sich genau das Produkt für das kgV. Ist umgekehrt das kgV das Produkt, so kann kein Primfaktor in beiden Zahlen vorkommen, da er sonst im kgV nur so häufig vorkommen würde, wie er maximal in beiden Zahlen vorkommt; im Produkt wäre es ja die Summe der Häufigkeiten, die größer ist als das Maximum.

(c) Das ggT zweier Zahlen stimmt genau dann mit einer von diesen überein, wenn eine Zahl durch die andere teilbar ist.

Begründung: Ist eine Zahl durch die andere teilbar, so sind natürlich beide Zahlen durch diese teilbar. Einen größeren gemeinsamen Teiler kann es auch nicht geben, da kein Teiler größer sein kann als die Zahl selbst. Stimmt umgekehrt der ggT mit einer der beiden Zahlen überein, so sind beide Zahlen durch diesen teilbar, also auch die eine Zahl durch die andere.

(d) Das Produkt von kgV und ggT zweier Zahlen ist einfach das Produkt dieser beider Zahlen, man muss weder kgV noch ggT dazu ausrechnen. Das liegt daran, dass im ggT genau die Faktoren stecken, die in beiden Zahlen vorkommen, während im kgV genau diese Faktoren nur einmal vorkommen neben allen Faktoren, die die Zahlen nicht gemeinsam haben. Im Produkt der beiden Zahlen kommen die gemeinsamen Faktoren doppelt vor neben allen Faktoren, die die Zahlen nicht gemeinsam haben, genau wie im Produkt von ggT und kgV.

(e) Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7. Da diese natürlich (paarweise) keine gemeinsamen Faktoren haben, ist das kgV genau das Produkt der Zahlen:

$$\text{kgV}(2, 3, 5, 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Hinweis: Für alle Lösungen wurde vorausgesetzt, dass die Primfaktorzerlegung bei den natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge eindeutig ist. Außerdem wurde auch benutzt, dass die *unzerlegbaren* Zahlen, also die natürlichen Zahlen größer 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben, genau dieselben Zahlen sind, wie die mit der *Primeigenschaft*, dass sie ein Produkt genau dann teilen, wenn sie einen der Faktoren teilen. Diese beiden Behauptungen sind richtig, aber gar nicht so einfach zu beweisen. Interessierte sollten das unbedingt einmal probieren.

Lösung 3. (a) Im Folgenden sind die möglichen Gruppengrößen angegeben, wobei * für ein Turnier ohne Gruppenphase steht.

Mannschaften	Gruppengröße	K.-o.-Runden	Spiele des Siegers	Spiele
6	6	0	5	15
6	3	1	3	7
7	7	0	6	21
8	8	0	7	28
8	4	1	4	13
8	*	3	3	7

Nur bei 8 Mannschaften ist ein Turnier ohne Gruppenphase möglich.

(b) Da sich nur die Hälfte der Mannschaften für die nächste Runde qualifiziert, ist ein Spiel ohne Gruppenphase genau dann möglich, wenn man die Anzahl der Mannschaften solange durch 2 teilen kann, bis 1 übrig bleibt, also wenn sie eine Zweierpotenz ist.

(c) Für ungerade Anzahlen von Mannschaften muss auch die Anzahl der Gruppen ungerade sein. Dann können nicht jeweils zwei Gruppensieger gegeneinander spielen, also kann es keine K.-o.-phase geben. Für gerade Zahlen sind zumindest zwei Gruppen und ein Finalspiel zwischen beiden Gruppensiegern möglich.

(d) Im Folgenden werden Gruppengrößen von 1 oder 2 zugelassen, diese Turnierverläufe entsprechen dann einem Turnier ohne Gruppenphase.

In jedem Turnier mit n Mannschaften ist die Gruppengröße durch den größten ungeraden Teiler u von n teilbar, weil die Anzahl der Gruppen sonst ein Vielfaches einer von 1 verschiedenen ungeraden Zahl wäre und der Turniersieger aus den Gruppensiegern nicht in einer K.-o.-Phase ermittelt werden könnte. Da die Gruppengröße ein Teiler von n ist, ist sie also entweder gerade oder gleich u. Falls die Gruppengröße eine gerade Zahl ≥ 4 ist, erhält man ein Turnier mit weniger Spielen, indem man jede Gruppe in jeweils zwei Gruppen aufteilt und in einer zusätzlichen Runde der K.-o.-Phase jeweils die Gruppensieger der beiden Gruppen gegeneinander spielen lässt: In den größeren Gruppen musste jede Mannschaft gegen jede andere spielen, nun spielt keine Mannschaft mehr gegen jede andere der größeren Gruppe.

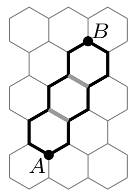
Daher muss die Gruppengröße in einem Turnier mit möglichst wenigen Spielen gleich u sein.

(e) Da die Anzahl der Mannschaften nach jeder K.-o.-Runde gedrittelt oder halbiert wird, ist genau dann ein Turnier ohne Gruppenphase möglich, wenn die Anzahl der Mannschaften durch keine Primzahl außer 2 und 3 teilbar ist. (Sie ist also ein Produkt einer Zweier- und einer Dreierpotenz. Die Anzahl der Runden, bei denen jeweils 2 bzw. 3 Spieler aufeinander treffen, entspricht der Zahl, wie häufig 2 bzw. 3 in der Primfaktorzerlegung auftritt. Die Reihenfolge der verschiedenen Typen von Runden kann frei gewählt werden.)

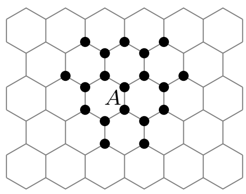
(f) Nur wenn die Anzahl der Mannschaften weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, ist keine einzige K.-o.-Runde möglich.

(g) Als Gruppengröße wird der größte Teiler der Anzahl von Teilnehmern gewählt, der weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. (Um ihn zu ermitteln, kann man zunächst so oft wie möglich durch 2 teilen, bis man den größten ungeraden Teiler erhält. Wenn man anschließend so oft wie möglich durch 3 teilt, erhält man am Ende die gesuchte Zahl). Die Anzahl der Gruppen ist dann durch keine Primzahl außer 2 und 3 teilbar, daher kann der Gruppensieger durch eine K.-o.-Phase ermittelt werden. (Dass man dabei die kleinstmögliche Anzahl von Spielen erhält, kann ähnlich wie bei den Fußballturnieren begründet werden.)

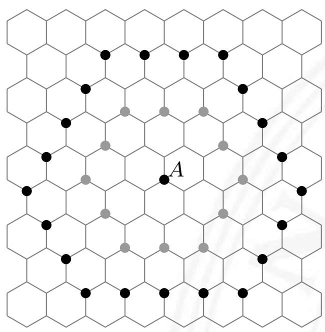
Lösung 4. (a) Man muss insgesamt dreimal RO bzw. OR gehen und einmal L, so dass 7 die Entfernung von A und B ist. Für L hat man vier Möglichkeiten: LORO-ROR, ROLOROR, ROROLOR und ROROROL.



(b) Es ergibt sich ein ausgefüllter Kreis mit Radius 3, da die Punkte ab der Entfernung 4 nicht mehr dazu gehören:

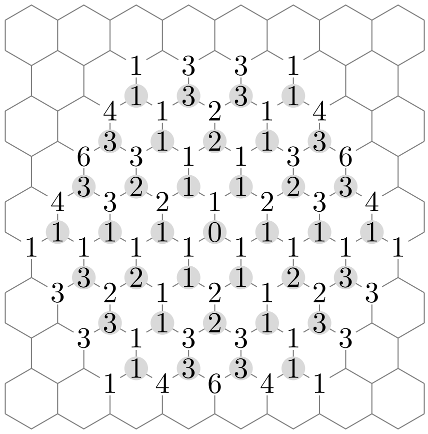


(c) Kreise mit Mittelpunkt A und Radius 4 bzw. 7:



Zum Kreis mit Radius 4 gehören 12 Punkte, zu dem mit Radius 7 gehören 21 Punkte. Zu einem Kreis mit Radius n gehören $3 \cdot n$ Punkte, es kommt nämlich immer abwechselnd bei 3 der 6 „Seiten“ des Kreises jeweils ein Punkt dazu.

(d) Man bestimmt nacheinander für die Kreise mit Radius 1, 2, ..., 7, wie viele Pfade zu den Punkten führen. An jedem Punkt addiert man die Anzahlen aller Punkte des vorherigen Kreises, die einen Schritt von diesem Punkt entfernt sind:



Hinweis: Man kann zwölf Anfänge von Pascal-Dreiecken erkennen, in jeder Farbe sechs und jeweils von den Linien aus 1en begrenzt. Mit dieser Beobachtung, die man allerdings noch begründen müsste, kann man relativ einfach für jeden beliebigen Punkt die Anzahl der Pfade dorthin berechnen.